Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue

Terceira Edição
Versão de Março de 2016

Marco A. P. Cabral

PhD Indiana University, EUA
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Introdução

Começamos justificando porque mais um texto de Teoria da Medida:

(a) Teoria sucinta com muitos exercícios (1/3 do texto), muitos deles originais e mais concretos do que os usualmente encontrados em livros de medida, ajudando a transição de alunos de graduação.

(b) As construções de σ-álgebra induzidas por operações de conjuntos e funções ganhou um destaque não encontrado usualmente nos livros.

(c) Motivações no início de cada capítulo e seção, fazendo considerações de caráter filosófico/histórico da matéria, interligando diversas seções do livro entre si.

(d) Apresentamos no último capítulo teoria da medida em espaços de funções, com aplicações em espaços de lançamentos de moeda infinitos e teoria da Probabilidade.

Os pré-requisitos são:

(a) Conceitos de Análise Real: enumerabilidade, limite de sequências e séries, supremum e noções de topologia da reta.

(b) Teoria (elementar) dos Conjuntos, embora muito será aprendido no texto.

Como foi definido o conteúdo do livro? Apresentamos a Teoria Geral de Medida, sem nos restringir à Medida de Lebesgue. Apresentamos a medida de Lebesgue utilizando o método de Carathéodory pelo seu uso na construção das medidas de Lebesgue-Stieltjes e de Hausdorff. Comparamos as integrais de Riemann e Lebesgue. Resultados básicos da Teoria da Medida como o Teorema da Convergência Monótona e Dominada, Fubini, derivada de Radon-Nikodým e espaço produto são conectados com aplicações. Construímos espaço de medida (probabilidade) de lançamentos de moedas e de caminhos.

Dominando este material o aluno estará pronto para aplicações em Teoria de Probabilidades, Finanças, Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional.

Terminamos com a dica básica em Matemática: Fazer a maior quantidade de exercícios possível é o caminho para se aprender Matemática.

Sumário

Capítulo 1

Espaço com Medida

Uma medida num conjunto X é uma função que atribui um número real não-negativo para subconjuntos de X. Pode ser interpretada como contagem, área, tamanho, massa, volume, capacidade térmica ou qualquer propriedade aditiva, i.e., uma propriedade tal que a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual a soma de suas medidas. Um exemplo importante é a medida de Lebesgue no espaço euclidiano, que atribui comprimento, área e volume, respectivamente, a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $n = 1, 2, 3$.

Podemos enxergar a origem do conceito de medida no conceito de contagem, que pode ser generalizada de dois modos:

(a) como cardinalidade (número de elementos), ou

(b) como medida (comprimento, área, volume, etc.).

Existem conjuntos que são pequenos do ponto de vista da medida mas grandes do ponto de vista da cardinalidade. Um exemplo é $\mathbb{Q}$, que possui medida (de Lebesgue) 0 mas possui infinitos pontos (cardinalidade infinita).

Gostaríamos de atribuir medida para todo subconjunto de X mas veremos que nem sempre isso é possível.

1.1 Álgebra e σ-Álgebra

Como motivação observamos que infelizmente (Observação 1.11, p.11 mostra isto para comprimentos de subconjuntos de $\mathbb{R}$) **não** é possível atribuir, de forma consistente, área para todo subconjunto do plano. Para ser mais preciso, é impossível definir uma função $A : \mathrm{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades: $A(\Omega) = A(\Omega + v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ (área é invariante por translação), $A(\emptyset) = 0$, $A(\cup_i B_i) = \sum_i A(B_i)$ para toda sequência B_i disjunta de regiões do plano e $A([0,1] \times [0,1]) = 1$. Assim consideramos uma coleção especial (usualmente menor) de subconjuntos de X onde a medida está definida, a chamada σ-álgebra de subconjuntos de X. Elementos da σ-álgebra são chamados de conjuntos mensuráveis.

DEFINIÇÃO 1.1 *Uma σ-**álgebra de subconjuntos de** $\mathbf{X}$ é uma família Σ de subconjuntos de X, isto é $\Sigma \subset \mathrm{P}(X)$, tal que:*

(a) $\emptyset \in \Sigma$;

(b) para todo $E \in \Sigma$, seu complemento $E^{\complement} = X \setminus E \in \Sigma$;

(c) para toda sequência $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ, sua união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

*Elementos de Σ são chamados de **conjuntos mensuráveis**.*

*Se Σ satisfaz (a) e (b) e, ao invés de (c) satisfaz (c') abaixo dizemos que é uma **álgebra**.*

(c') Dados $E, F \in \Sigma$, sua união $E \cup F \in \Sigma$.

Observação 1.1 *Uma **álgebra de conjuntos** é fechada pelas operações de complementação e por **união finita**. O σ da σ-álgebra significa ser fechada também pela **união enumerável**. Note que (prove isso) não é preciso considerar a complementação enumerável.*

Prove as afirmações de cada um dos exemplos.

Exemplo 1.1 *Existem duas σ-álgebra de subconjuntos de X que são canônicas:*
(a) $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, a menor σ-álgebra de X; *(b) $\mathcal{P}(X)$, a maior σ-álgebra de X.*

Exemplo 1.2 *Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$. São σ-álgebra de X:*
(a) $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}$; *(b) $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$.*

Exemplo 1.3 *O conjunto $\Sigma = \{A \subset \mathbb{N} \mid A$ é infinito ou vazio$\}$ satisfaz algumas das propriedades (quais?) mas não é uma σ-álgebra.*

Exemplo 1.4 *O conjunto $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{\complement}, \mathbb{R}\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.*

Exemplo 1.5 *O conjunto $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ ou $A^{\complement}$ é enumerável$\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.*

Exemplo 1.6 *O conjunto $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ é um intervalo$\}$ não é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.*

LEMA 1.2 (Propriedades Elementares de uma σ-álgebra) *Se Σ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, então para todo E, $F \in \Sigma$:*
(a) $E \cup F \in \Sigma$; *(b) $E \cap F \in \Sigma$;* *(c) $E \setminus F \in \Sigma$;*
(d) se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Prova: Exercício para o leitor. ■

Exemplo 1.7 *Se $E_n, F_q, G_t \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$ e $t \in \mathbb{R}$, pela definição e pelo último lema (reindexando as famílias de conjuntos envolvidas) pertencem a Σ:*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} E_n, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n, \quad \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} F_q, \quad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} F_q.$$

Por outro lado, $\bigcup_{t \in [0,1]} G_t$ e $\bigcap_{t \in [0,1]} G_t$ podem não pertencer a Σ.

O próximo lema constrói uma σ-álgebra gerada por uma família de σ-álgebras. A formulação é abstrata mas é uma técnica muito utilizada em álgebra e análise para se obter a existência de um objeto mínimo com certa propriedade: tome a interseção de todos objetos com esta propriedade.

LEMA 1.3 *Seja $\mathcal{S} = (\Sigma_i)_{i \in I}$ uma família (não-vazia) de σ-álgebras de subconjuntos de X. Então*

$$\bigcap_{i \in I} \Sigma_i = \{E \in \Sigma_i \mid \text{ para todo } i \in I\},$$

a interseção de todas as σ-álgebras que pertencem a $\mathcal{S}$, é uma σ-álgebra de X.

Prova: Exercício para o leitor. Note que como $\Sigma_i \subset \mathrm{P}(X)$, a interseção também é um subconjunto de $\mathrm{P}(X)$. ■

COROLÁRIO 1.4 *Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X. Existe $\Sigma_{\mathcal{A}}$, a menor σ-álgebra de subconjuntos de X incluindo $\mathcal{A}$, i.e., se $\widetilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$, então $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\Sigma}$.*

Demonstração. Defina

$$\mathcal{S} = \{\Sigma \mid \ \Sigma \text{ uma } \sigma\text{-álgebra de subconjuntos de } X,\ \mathcal{A} \subset \Sigma\}$$

e $\Sigma_{\mathcal{A}} = \bigcap \mathcal{S}$. Complete o argumento. ■

DEFINIÇÃO 1.5 *Dizemos que $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{P}(X)$ é a σ-álgebra de subconjuntos de X* **gerada por** *$\mathcal{A} \subset \mathrm{P}(X)$ se:*
(a) $\Sigma_{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra;
(b) $\mathcal{A} \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$;
(c) Se $\widetilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra com $\mathcal{A} \subset \widetilde{\Sigma}$, então $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\Sigma}$ (a menor). Denotamos $\Sigma_{\mathcal{A}}$ por $\sigma(\mathcal{A})$.

Exemplo 1.8 *Para um X qualquer, a σ-álgebra gerada por $\emptyset$ é $\{\emptyset, X\}$.*

Exemplo 1.9 *A σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$ gerada por $\{\{n\} \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ é $\mathrm{P}(\mathbb{N})$.*

Exemplo 1.10 *A σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$ gerada por $\{\{1\}, \{2\}\}$ é $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1\}^{\complement}, \{2\}^{\complement}, \{1,2\}^{\complement}, \mathbb{N}\}$.*

São aplicações importantes desta definição a σ-álgebra gerada por intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Pode-se considerar também a σ-álgebra gerada por intervalos fechados ou ainda por conjuntos abertos. Pelo Exercício 1.11, p.15 todos geram a mesma σ-álgebra.

DEFINIÇÃO 1.6 *A σ-álgebra gerada pela família de abertos de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$) é conhecida como* **σ-álgebra de Borel**. *Seus elementos são os* **conjuntos de Borel**[1] *ou* **borelianos**.

Esta definição é generalizada para **espaços topológicos** (conjunto munido de uma topologia, um subconjunto das partes satisfazendo propriedades similares da definição de σ-álgebra).

DEFINIÇÃO 1.7 *Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de X é conhecida como* **σ-álgebra de Borel**. *Seus elementos são os* **conjuntos de Borel** *ou* **borelianos** *de X.*

[1] Émile Borel: 1871 Saint Affrique, France – 1956 Paris, France.

1.2 Construindo Novas σ-Álgebras

Alguns desafios, objeto de exercícios e outros capítulos, são construir novas σ-álgebras partindo de σ-álgebra(s) já existente. Existem construções análogas no contexto de: Espaços Topológicos, Espaços Vetoriais, Espaços Métricos, Grupos, Anéis, etc.

Nas definições abaixo respondemos a questão: Dada uma σ-álgebra em X (já existente) como gerar uma σ-álgebra em: (a) $X \times X$ (por extensão)? (b) $A \subset X$ (por restrição)?

DEFINIÇÃO 1.8 (σ-álgebra produto) *Dadas σ-álgebras Σ_X em X e Σ_Y em Y a σ-álgebra produto $\Sigma_{X \times Y}$ em $X \times Y$ é definida por $\Sigma_{X\times Y} = \sigma(\Sigma_X \times \Sigma_Y)$, onde $\Sigma_X \times \Sigma_Y$ é o conjunto formado por $A \times B$ com $A \in \Sigma_X$ e $B \in \Sigma_Y$.*

DEFINIÇÃO 1.9 (σ-álgebra por restrição) *Dada σ-álgebra Σ em X e $A \subset X$ qualquer (não necessariamente $A \in \Sigma$), definimos a σ-álgebra $\Sigma \cap A = \{E \cap A \subset X \mid \quad E \in \Sigma\}$.*

De forma mais geral (obtemos casos acima por projeção e inclusão), a definição abaixo responde a questão: Dada $f : X \to Y$ e uma σ-álgebra em :

(a) Y, como gerar (trazendo) σ-álgebra em X?

(b) X, como gerar (levando) σ-álgebra em Y?

DEFINIÇÃO 1.10 (σ-álgebra com funções) *Considere uma função $f : X \to Y$. Dada σ-álgebra:*

(a) Σ_Y em Y, definimos a σ-álgebra $\Sigma_{f,X} = \{f^{-1}(A) \subset X \mid \quad A \in \Sigma_Y\}$ em X.

(b) Σ_X em X, definimos a σ-álgebra $\Sigma_{f,Y} = \{A \subset Y \mid \quad f^{-1}(A) \in \Sigma_X\}$ em Y.

As demonstrações que as construções acima geram σ-álgebra são deixadas para o Exercício 1.27, p.16. A interconexão entre estas construções é feita em 3 exercícios, começando no Exercício 1.28, p.16, utilizando a **projeção natural** $\pi_X : X \times Y \to X$ definida por $\pi_X(x, y) = x$ e a **inclusão natural** de $A \subset X$, $i : A \to X$ definida por $i(a) = a$.

Na linguagem do Capítulo 2, dizemos que a σ-álgebra produto é a menor que torna as projeções mensuráveis (ver Exercício 2.13, p.40). Podemos construir uma σ-álgebra em um produto cartesiano infinito (até mesmo não-enumerável) induzido pela σ-álgebra de cada fator, mas isto é assunto do Capítulo 3, Definição 3.8, p.50.

1.3 Medida

A teoria da medida foi desenvolvida no final do século XIX e no início do século XX por Emile Borel, Henri Lebesgue[2], Johann Radon[3] and Maurice Fréchet[4], entre outros. As principais aplicações são:

- na fundamentação da integral de Lebesgue, que generaliza (com vantagens) a integral de Riemann.
- na axiomatização da teoria de probabilidade feita por Andrey Kolmogorov;
- na definição de integral em espaços mais gerais do que os euclidianos.

[2]Henri Lebesgue: 1875 Beauvais, France–1941 Paris, France.
[3]Johann Radon: 1887 Tetschen, Bohemia (now Decin, Czech Republic) – 1956 Vienna, Austria.
[4]Maurice Fréchet: 1878 Maligny, France – 1973 Paris, France.

A medida é uma função que assume valores em $[0, \infty]$. Assim precisamos definir operações envolvendo ∞:

(a) adição: $\infty + \infty = \infty + a = a + \infty = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(b) subtração: $\infty - a = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$; **mas** $\infty - \infty$ não está definido;

(c) multiplicação: $\infty \cdot \infty = a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ para todo $a > 0$ e convencionamos (**em medida**, confronte com cálculo) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$;

(d) relação de ordem, sup e inf: $a < \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Com a relação de ordem definimos o sup e o inf de subconjuntos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. A convenção usual é que $\inf \emptyset = \infty$;

(e) somatórios usuais (enumeráveis): Definimos $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ com $x_n \in [0, \infty]$ da seguinte forma:

(i) se todos os x_n são finitos, trata-se de uma série de termos não-negativos: ou converge para um número real, ou é ilimitada, quando diremos que converge para ∞.

(ii) se um dos x_n's é igual a ∞, escrevemos que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$.

(f) somatórios não-enumeráveis: Definimos $\sum_{i \in I} x_i$ com $x_i \in [0, \infty]$ com $(x_i)_{i \in I}$ (I pode ser não enumerável), na definição abaixo.

DEFINIÇÃO 1.11 *Dado $(x_i)_{i \in I}$ com $x_i \in [0, \infty]$, definimos*

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \subset I \text{ é finito} \right\}.$$

Se $I = \emptyset$, então definimos $\sum_{i \in I} x_i = 0$.

DEFINIÇÃO 1.12 *Dizemos que a sequência $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é* **disjunta** *se nenhum ponto pertence a mais do que um E_n, isto é, se $E_m \bigcap E_n = \emptyset$ para todos m, $n \in \mathbb{N}$ distintos.*

De forma análoga, se $\langle E_i \rangle_{i \in I}$ é uma família de conjuntos indexada por um conjunto arbitrário I, então ele é **disjunto** *se $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ para todos i, $j \in I$ distintos.*

DEFINIÇÃO 1.13 *Um* **espaço de medida** *é uma tripla (X, Σ, μ) onde:*

(a) X é um conjunto;

(b) $\Sigma \subset \mathrm{P}(X)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X;

(c) $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma função tal que:

(c1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(c2) se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ, então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

*A propriedade (c2) é chamada de σ-***aditividade***.*

Elementos de Σ são ditos **conjuntos mensuráveis** *(ou μ-mensuráveis) e μ* **medida em X***.*

Observação 1.2 *Uma medida numa σ-álgebra de Borel (ver Definição 1.6, p.3) é conhecida como* **medida de Borel***.*

A medida é definida somente numa σ-álgebra pois é impossível, de forma geral, se atribuir uma medida a TODOS os subconjuntos, a não ser para algumas medidas triviais como por exemplo a medida delta de Dirac do Exemplo 1.11, p.6 e a medida de contagem do Exemplo 1.12, p.6, ambas definidas na σ-álgebra trivial $\mathrm{P}(X)$.

DEFINIÇÃO 1.14 *Seja $h : X \to [0, \infty]$ uma função qualquer. Dado $E \subset X$, defina:*

$$\mu_h(E) = \sum_{x \in E} h(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in I} h(x) \mid \ I \subset E \text{ é finito} \right\}.$$

Então μ_h é uma medida em $\mathrm{P}(X)$. Dizemos que é uma **medida pontual**.

Exemplo 1.11 *Dado $a \in X$, a medida pontual μ_{I_a}, gerada pela função indicadora I_a é conhecida como* **medida delta de Dirac**[5], *denotada por δ_a, de modo que* $\delta_a(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \notin Y, \\ 1, & \text{se } a \in Y. \end{cases}$

Exemplo 1.12 *Se $h(x) = 1$ para todo x, obtemos a* **medida de contagem** *em X, definida por* $\mu_h(E) = \begin{cases} \text{no. de pontos de } E, & \text{se } E \text{ é finito}, \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito}. \end{cases}$

Exemplo 1.13 *Seja $X = \mathbb{N}$, $h(n) = 2^{-n-1}$ para cada n; então $\mu(\mathbb{N}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$.*

LEMA 1.15 (Propriedades elementares da medida) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.*

(a) Se E, $F \in \Sigma$ e $E \cap F = \emptyset$, então $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

(b) Se E, $F \in \Sigma$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(c) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ para todo E, $F \in \Sigma$.

(d) Se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ, então $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

(e) Se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em Σ (isto é, $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

(f) Se $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em Σ (isto é, $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$), e se algum $\mu(E_n)$ é finito, então

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Prova: Deixamos (a), (b), (c) e (d) como exercícios.

(e) Seja $F_0 = E_0$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ para $n \geq 1$; então $\langle F_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Consequentemente $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n)$. Mas uma indução em n, usando

[5] Paul Dirac: 1902 Bristol, England – 1984 Tallahassee, Florida, USA.

(a) para o passo indutivo, mostra que $\mu(E_n) = \sum_{m=0}^{n} \mu(F_m)$ para todos n. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \mu(F_m) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Finalmente, $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ porque (por (b)) $\langle \mu(E_n) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.

(f) Suponha que $\mu(E_k) < \infty$. Defina $F_n = E_k \setminus E_{k+n}$ para $n \in \mathbb{N}$, $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$; então $\langle F_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em Σ e $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$, por (e) acima. Temos que $\mu(F_n)+\mu(E_{k+n}) = \mu(E_k)$; como $\mu(E_k) < \infty$, nós podemos escrever que $\mu(F_n) = \mu(E_k)-\mu(E_{k+n})$, e portanto

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} (\mu(E_k) - \mu(E_{k+n})) = \mu(E_k) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Agora, $F \subset E_k$, então $\mu(F) + \mu(E_k \setminus F) = \mu(E_k)$, e (novamente pois $\mu(E_k)$ é finito) $\mu(F) = \mu(E_k) - \mu(E_k \setminus F)$. Portanto nos temos que $\mu(E_k \setminus F) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Mas $E_k \setminus F$ é somente $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Finalmente, $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ pois $\langle \mu(E_n) \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente. ■

Observação 1.3 *Em (f) acima é essencial ter que* $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < \infty$. *Ver Exercício 1.35, p.17.*

Observação 1.4 *O Exercício 1.36, p.17 prova que uma função de conjuntos finita-aditiva é σ-aditiva se, e somente se, for "contínua no conjunto vazio". Todos teoremas de convergência, incluindo o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, são baseados nesta propriedade (na verdade esta propriedade é essencialmente este Teorema).*

DEFINIÇÃO 1.16 *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Um conjunto $A \subset X$ possui* **medida nula** *se existe um conjunto $E \in \Sigma$ tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$.*

Observação 1.5 *Um conjunto de medida nula não necesariamente é mensurável, embora esteja contida em um conjunto mensurável de medida nula.*

DEFINIÇÃO 1.17 *Espaços de medida em que todos os conjuntos de medida nula são mensuráveis é chamado de* **completo**.

LEMA 1.18 (Ideal de Conjuntos de Medida Nula) *Seja $\mathcal{N}$ a família de conjuntos de medida nula de um espaço de medida (X, Σ, μ). Então:*

(a) $\emptyset \in \mathcal{N}$;

(b) se $A \subset B \in \mathcal{N}$, então $A \in \mathcal{N}$;

(c) se $\langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

Prova: Exercício 1.45, p.18. ■

LEMA 1.19 *Dado um espaço de medida (X, Σ, μ), existe um espaço de medida completo $(X, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ tal que $\Sigma \subset \widetilde{\Sigma}$ e $\mu = \widetilde{\mu}$ em Σ.*

Prova: Seja $\mathcal{N}$ a família de conjuntos de medida nula de (X, Σ, μ). Considere $\widetilde{\Sigma} = \{E \cup Z \in \mathrm{P}(X) \mid \ E \in \Sigma,\ Z \in \mathcal{N}\}$. Para cada $Y \in \widetilde{\Sigma}$, $Y = E \cup Z$, defina $\widetilde{\mu}(Y) = \mu(E)$. Complete o argumento. ∎

DEFINIÇÃO 1.20 *Se uma afirmação $P(x)$ pode ser aplicada aos elementos $x \in X$ de um espaço com medida μ, nós dizemos que*

$$P(x) \text{ para } (\mu\text{-})\text{quase todo ponto } x \in X$$

significando que o conjunto $\{x \in X \mid \ P(x) \text{ é falso}\}$ possui medida nula com relação a medida μ.

Observação 1.6 *As expressões '**quase todo ponto**' (**qtp**), '**quase sempre**', '**almost everywhere**' (**a.e.**), '**almost surely**' (**a.s.**), '**presque partout**' (**p.p.**) significam a mesma coisa.*

Exemplo 1.14 *Se $f, g, f_n : X \to \mathbb{R}$ são funções:*
(a) '$f > 0$ qtp.' significa que $\{x \in X \mid \ f(x) \leq 0\} = \{f \leq 0\}$ possui medida nula;
(b) '$f = g$ qtp.', significa que $\{x \in X \mid \ f(x) \neq g(x)\} = \{f \neq g\}$ possui medida nula;
(c) '$f < g$ qtp.', significa que $\{x \in X \mid \ f(x) \geq g(x)\} = \{f \geq g\}$ possui medida nula;
(d) '$f \geq g$ qtp.', significa que $\{x \in X \mid \ f(x) < g(x)\} = \{f < g\}$ possui medida nula;
(f) '$f_n \to g$ qtp.', significa que $\{x \in X \mid \ f_n(x) \not\to g(x)\} = \{f_n \not\to g\}$ possui medida nula.

1.4 Construindo Novas Medidas

Alguns desafios, objeto de exercícios e outros capítulos, são construir novos espaços com medida partindo de espaço com medida já existente. Alguns problemas são:

(a) Dado medida em X:

(i) e $A \subset X$, restringir para medida em A (Exercício 1.38, p.18).

(ii) e função $f : X \to Y$, induzir (push-forward) medida em Y (Exercício 1.39, p.18).

(iii) estender para medida em $X \times X$ (Teorema 2.31, p.38).

(b) Dado medidas em X_i, para cada i, definir uma medida no produto cartesiano finito $X_1 \times \cdots \times X_N$ (Observação 2.15, p.38) ou no produto cartesiano infinito $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ (Seção 3.4, p.49).

Alguns exemplos destas construções são:

(a) Dada medida em $\mathbb{R}$ (Lebesgue por exemplo), construir medida em $\mathbb{R}^n$.

(b) Dada uma medida em $\mathbb{R}^n$ (por exemplo medida de Lebesgue), construir por restrição uma medida em qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Note que a medida de restrição pode não ser interessante: a restrição da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$ em $A = S^2$ (esfera) é trivial: todo conjunto tem medida zero (volume zero). A medida em S^2 pode ser feito como medida invariante pelo grupo de rotações (Medida de Haar, Seção 1.8, p.12) ou medida de Hausdorff de dimensão 2 (Seção 1.8.2, p.13) ou utilizando função f que parametriza S^2 (medida em variedades).

(c) Dada medida em $\mathbb{R}$ (Lebesgue por exemplo), construir medida no espaço das sequências em $\mathbb{R}$. Este espaço é associado ao produto cartesiano enumerável infinito de $\mathbb{R}$. Um exemplo é o espaço de sequência de lançamentos infinitos de uma moeda.

(d) Num certo sentido (Teorema de Radon-Nikodýn, Seção 2.5, p.35), toda medida "contínua" é gerada partindo da medida de Lebesgue.

1.5 Medida com Sinal (cargas)

DEFINIÇÃO 1.21 (medida com sinal ou carga) *Dado (X, Σ) uma função $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ é chamada de* **medida com sinal ou carga** *se $\lambda(\emptyset) = 0$ e se λ for σ-aditiva.*

O exemplo canônico é dada um função mensurável f com $\int_X |f|\, d\mu < \infty$, $\lambda(A) = \int_A f\, d\mu$. A teoria segue com o Teorema da decomposição de Hahn de cargas:

TEOREMA 1.22 (decomposição de Hahn) *Se λ é uma medida com sinal então existem $P, N \in \Sigma$ tais que $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$ e λ restrita a P é positiva, isto é, para todo $E \subset P$, $\lambda(E) \geq 0$, λ restrita a N é negativa (mutatis-mutandis). A decomposição é única a menos de um conjunto de medida nula e permite escrever $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, com λ^+, λ^- medidas ("sem sinal").*

Prova: Ver [1] p.81, Theorem 8.2. ■

1.6 Medida Exterior e Método de Carathéodory

A teoria geral de Medida Exterior foi introduzida por Carathéodory[6]. É um método para se construir medidas não-triviais. Consiste em definir a medida em uma classe pequena de conjuntos, como intervalos ou bolas ou cilindros por exemplo, e estender para uma σ-álgebra gerada por estes conjuntos por "continuidade". Assim surgem as medidas de Lebesgue-Stieltjes e a medida de Wiener (do movimento browniano) por exemplo. Ilustramos este método estendendo a medida de intervalos de $\mathbb{R}$ para qualquer subconjunto:

(a) Defina a medida de um intervalo (a, b) (ou $[a, b]$, ou $(a, b]$, etc.) como $b - a$.

(b) Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ qualquer defina sua medida como o ínfimo da soma das medidas de intervalos que cobrem A.

(c) Esta função não é σ-aditiva (medida da união enumerável disjunta é igual a soma das medidas) em $\mathrm{P}(\mathbb{R})$: é necessário reduzir seu domínio para que seja.

De forma mais geral o Método de Carathéodory consiste no seguinte:

(a) Definimos uma função, a chamada medida exterior, em $\mathrm{P}(X)$. Exigimos da medida exterior menos do que da medida (subaditividade ao invés de aditividade).

(b) Restringimos esta função a uma σ-álgebra maximal onde a medida exterior é uma medida.

Embora existam outras formas de construir a medida de Lebesgue (por exemplo veja a Seção 2.8, p.38), esta construção é utilizada para se definir outras medidas, como por exemplo a medida (exterior) de Hausdorff.

DEFINIÇÃO 1.23 *Uma* **medida exterior** *em X é uma função $\theta^* : \mathrm{P}(X) \to [0, \infty]$ tal que*

(a) $\theta^*(\emptyset) = 0$,

(b) se $A \subset B \subset X$, então $\theta^*(A) \leq \theta^*(B)$ (monótona),

(c) para toda sequência $\langle A_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X,

$$\theta^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^*(A_n) \quad \textit{(subaditiva).}$$

O Teorema da Extensão de Carathéodory que apresentamos agora diz que dada uma medida exterior θ^* existe uma σ-álgebra maximal tal que θ^* restrita a esta σ-álgebra é uma medida.

[6]Constantin Carathéodory: 1873 Berlin, Germany – 1950 Munich, Germany.

⋆ **TEOREMA 1.24 (Teorema da Extensão de Carathéodory)** *Seja θ^* uma medida exterior em X. Defina*

$$\Sigma_{\theta^*} = \{A \subset X \mid \quad \theta^*(E) = \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A) \text{ para todo } E \subset X\}.$$

Então Σ_{θ^*} é uma σ-álgebra de subconjuntos de X gerado pela medida exterior θ^*. Defina $\mu : \Sigma_{\theta^*} \to [0, \infty]$ por $\mu(A) = \theta^*(A)$ para $A \in \Sigma_{\theta^*}$; então $(X, \Sigma_{\theta^*}, \mu)$ é um espaço de medida completo.

Prova: Ver [1] p.101, Theorem 9.7. ■

Observação 1.7 *Pelos Exercícios 1.63 e 1.63, p.20 basta mostrar que $\theta^*(E) \geq \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A)$ para $\theta^*(E) < \infty$ para provar a igualdade.*

Observação 1.8 *Refletindo sobre a construção da σ-álgebra de Carathéodory.*
Se A for mensurável, $A^\complement$ também será e $\theta^*(A) + \theta^*(A^\complement) = \theta^*(X)$. Na construção acima queremos que isto ocorra relativamente a qualquer $E \subset X$, de forma que a soma das medidas exteriores da parte de A em E e de seu complementar em E seja igual a medida exterior de E.

O conjunto A decompõe qualquer E em duas partes disjuntas $(E \cap A)$ e $(E \setminus A)$ (ver Figura 1.1). Se $\theta^*(E) = \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A)$ para todo E, então o conjunto A será mensurável.

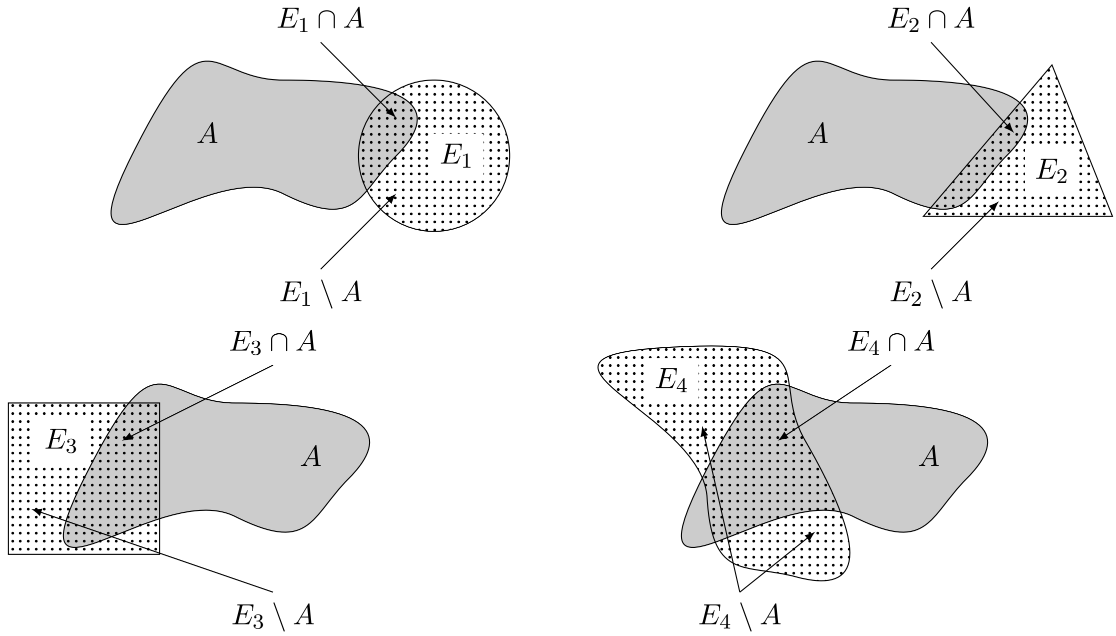

Figura 1.1: A é mensurável sse $\theta^*(E_i) = \theta^*(E_i \cap A) + \theta^*(E_i \setminus A)$ para todo $E_i \subset X$.

1.7 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

A medida de Lebesgue, além de ser a mais importante para aplicações, foi, historicamente, o guia para a Teoria Geral da Medida, onde os resultados inicialmente foram desenvolvidos.

O roteiro que vamos seguir é definir o comprimento de intervalos e utilizá-los para definir uma medida exterior. Aplicando o Teorema de Extensão de Carathéodory obtemos uma medida e uma

σ-álgebra, chamadas de medida e σ-álgebra de Lebesgue. Esta será a primeira medida não-trivial que definiremos. A medida de **Lebesgue-Stieltjes** (Definição 1.30, p.13) é construída de forma semelhante.

DEFINIÇÃO 1.25 (medida exterior de Lebesgue) *Dado um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ defina $|I| = b - a$ ($a < b$) e $|\emptyset| = 0$. Definimos a* **medida exterior de Lebesgue** *de $A \subset \mathbb{R}$ por:*

$$\theta^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j| \;\; \middle| \;\; \langle I_j \rangle_{j\in\mathbb{N}} \text{ é uma seq. de intervalos abertos t.q. } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\}.$$

Observação 1.9 *Como $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$ o $\inf$ da definição é tomado num conjunto não-vazio.*

Observação 1.10 *A medida exterior de Lebesgue de A é similar, em integração, a integral superior. Considerando toda união de intervalos que contém A, que erram por excesso, é o limite inferior da soma das medidas destes intervalos.*

Uma surpresa do próximo teorema é que embora seja fácil mostrar que $\theta^*(I) \leq |I|$ para todo intervalo aberto I, a igualdade envolve um argumento delicado.

PROPOSIÇÃO 1.26 (Medida Exterior de Lebesgue) *Seja θ^* dada pela Definição 1.25.*

(a) θ^* é uma medida exterior em $\mathbb{R}$.

(b) θ^* é uma extensão de comprimento de intervalo, isto é, $\theta^*(I) = |I|$ para todo intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Prova: Exercício. ■

Como a medida exterior de Lebesgue é uma medida exterior, podemos usá-la para construir a medida μ usando o método de Carathéodory.

DEFINIÇÃO 1.27 *A medida μ obtida pela aplicação do Teorema 1.24 à medida exterior θ^* é chamada de* **medida de Lebesgue em** $\mathbb{R}$. *Os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tais que*

$$\theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A) = \theta^*(E), \quad \text{para todo} \quad E \subset \mathbb{R},$$

são chamados de **conjuntos mensuráveis a Lebesgue**.

Observação 1.11 (Conjunto de Vitali) *O* **axioma da escolha** *implica, de forma não-trivial, que é impossível atribuir comprimento a todos subconjuntos de $\mathbb{R}$ preservando a aditividade e invariância por translação. O contraexemplo canônico é dado pelo o conjunto de Vitali*[a] *do Exercício 1.84, p.22, que constrói um $V \subset \mathbb{R}$ tal que infinitas (enumeráveis) translações V_i de V são disjuntas e $[0, 1] \subset \cup_i V_i \subset [-1, 2]$. Assim todos V_i's deveriam possuir o mesmo comprimento (por serem translações do mesmo conjunto V). Mas medida de V não pode ser nem zero nem finito pois $1 \leq \text{medida}(\cup_i V_i) = \infty \cdot \text{medida}(V) \leq 3$.*

[a] Giuseppe Vitali: 1875 Ravenna, Italy – 1932 Bologna, Italy.

Deixo como exercício provar que a definição abaixo (usual em livros de Análise Real) de conjuntos de medida (de Lebesgue) nula é equivalente a Definição 1.16, p.7.

DEFINIÇÃO 1.28 (medida (de Lebesgue) nula) *Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$ tem* **medida** *(de Lebesgue)* **nula** *se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \leq \varepsilon, \tag{1.1}$$

sendo $|I| = b - a$ se $I = (a, b)$.

O próximo Teorema garante que utilizando o método de Carathéodory obtemos uma σ-álgebra grande o suficiente para incluir os conjuntos de Borel.

$\star$ **TEOREMA 1.29 (Conjuntos de Borel são mensuráveis a Lebesgue)** *Todo intervalo é mensurável a Lebesgue.*

Prova: Exercício. ■

Este resultado implica que todos conjuntos abertos e fechados bem, como conjuntos construidos tomando união, interseção, complemento de intervalos, será mensurável. Assim, embora falso, parece que "todo subconjunto conjunto da reta é mensurável", razão pela qual esta sutileza teórica é ignorada em aplicações práticas. A demonstração que existem borelianos que não são obtidos assim é delicado (Exercício 1.20, p.15).

Observação 1.12 *Pode-se exibir (exemplo de Lusin – ver Wikipedia: Non-Borel set) um conjunto Lebesgue mensurável que não é Borel.*

Observação 1.13 *Podemos provar que a medida de Lebesgue é a única medida em $\mathbb{R}$ que:*
(a) é completa (Definição 1.17, p.7);
(b) é invariante por translação (i.e., $\mu(A) = \mu(A + x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$);
(c) contém a σ-álgebra dos intervalos de $\mathbb{R}$;
(d) atribui 1 ao intervalo $[0, 1]$.
Isto se generaliza de forma óbvia para o $\mathbb{R}^n$. Note a semelhança com a unicidade do determinante em $\mathbb{R}^n$ como única forma multilinear que atribui o valor 1 a um n-cubo.

1.8 Medida de Lebesgue-Stieltjes e Hausdorff

Algumas generalizações da medida de Lebesgue são:

- **Medida de Haar**[7] para um grupo topológico localmente compacto. O conjunto $\mathbb{R}$ é um grupo sob a operação de soma. Assim a medida de Lebesgue é invariante pela operação deste grupo. Podemos generalizar isto para um grupo qualquer para obter a chamada medida de Haar invariante pelo grupo. Este grupo pode ser gerado por uma EDO numa variedade (teoria ergódica). Um exemplo é a medida de Haar no círculo, que corresponde a medida do comprimento de arco do conjunto. Ela possui uma unicidade similar a medida de Lebesgue se for normalizada.

- **Medidas Exteriores de Hausdorff**[8], que generalizam a medida de Lebesgue para subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ (e de forma mais geral para qualquer espaço métrico, em particular para espaços de Hilbert).

[7] Alfréd Haar; Budapest 1885 — 1933
[8] Felix Hausdorff: 1868 Breslau, Germany (now Wroclaw, Poland) – 1942 Bonn, Germany.

- **Medida de Lebesgue-Stieltjes**, fundamental na Teoria da Probabilidade, generaliza simultanemanete a medida de Lebesgue e a delta de Dirac.

1.8.1 Medida de Lebesgue-Stieltjes

A ideia da Medida de Lebesgue-Stieltjes é definir o comprimento de um intervalo $I = (a, b)$ por $|I|_g = g(b) - g(a)$, com g função crescente qualquer e estender para uma σ-álgebra contendo os borelianos. Se $g(x) = x$ obtemos a medida de Lebesgue. Se g for a função de Heaviside ($g(x) = 0$ para $x < 0$ e $g(x) = 1$ para $x \geq 0$), obtemos a medida de Dirac. Se $g(x) = x$ para $x < 0$ e $g(x) = x + 1$ para $x \geq 0$, a medida gerada será a soma de Lebesgue com delta de Dirac.

É uma medida que não é necessariamente invariante por translação como a de Lebesgue. Uma analogia é com relatividade geral, onde a distância depende do local no espaço. Ela generaliza medidas discretas como Dirac e contínuas como Lebesgue, unificando o mundo discreto e contínuo.

Deixamos como exercício mostrar que a definição abaixo gera uma medida exterior em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1.30 (Medida de Lebesgue-Stieltjes) *Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente (não necessariamente ser contínua). Dado um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ defina $|I|_g = g(b) - g(a)$ $(a < b)$ e $|\emptyset|_g = 0$. Dado $A \subset \mathbb{R}$, defina*

$$\mu_g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |I_j|_g \;\middle|\; \langle I_j \rangle_{j\in\mathbb{N}} \text{ é uma seq. de intervalos abertos t.q. } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\}.$$

A **Medida de Lebesgue-Stieltjes** *μ_g e a σ-álgebra associada é gerada pelo método de Carathéodory partindo da medida exterior μ_g^*.*

Pode-se provar (Exercício 1.94, p.23) que "toda" medida definida na σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ é gerada desta forma.

Se g é absolutamente contínua existe h Lebesgue-integrável tal que $g(b) - g(a) = \int_a^b h\, d\lambda$, onde $d\lambda$ é a medida de Lebesgue. Por exemplo se g é diferenciável tome $h = g'$. Assim,

$$\int_a^b d\mu_g = g(b) - g(a) = \int_a^b h\, d\lambda,$$

Logo $d\mu_g = h\, d\lambda$. Neste caso Lebesgue-Stieltjes é uma medida de Lebesgue com peso variando a cada ponto, corroborando a analogia com relatividade geral. Esta notação inspira a manipulação $\dfrac{d\mu_h}{d\lambda} = h$, que é formalizada pelo Teorema de Radon-Nikodýn na Seção 2.5, p.35.

No caso geral (ver Exercício 1.95, p.23), quando g não é contínua, por ser crescente pode ser decomposta numa parte contínua mais uma constante com saltos. A parte contínua gera uma medida Lebesgue-Stieltjes e a outra deltas de Dirac.

1.8.2 Medida Exterior de Hausdorff

A Medida exterior de Hausdorff é uma família indexada pela dimensão $d \in \mathbb{R}^+$. Generaliza número de pontos ($d = 0$), comprimento ($d = 1$), área ($d = 2$) e volume ($d = 3$) para subconjuntos em $\mathbb{R}^n$. Note que a área de um disco de raio r é proporcional a r^2 e o volume de uma bola de raio r é proporcional a r^3. A ideia é definir a medida de bolas de raio r por r^d e estender para uma σ-álgebra contendo os borelianos. Como seu valor depende somente do raio e não da localização do centro, é uma medida invariante por translação (exercício).

DEFINIÇÃO 1.31 (medida exterior de Hausdorff) *Dada uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ de raio $r \geq 0$ defina $|B|_d = r^d$. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, defina a medida exterior de Hausdorff por*

$$\lambda_d^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |B_j|_d \;\middle|\; \langle B_j \rangle_{j\in\mathbb{N}} \text{ é uma seq. de bolas abertas t.q. } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \right\}.$$

Assim existem medidas d-dimensionais de Hausdorff para todo $d \geq 0$ (não necessariamente um inteiro!). Com elas podemos definir a dimensão (não necessariamente inteira) de Hausdorff de subconjuntos. Faz parte da chamada Teoria Geométrica da Medida. Ela aparece no estudo de atratores (em sistemas dinâmicos), na análise harmônica e na teoria do potencial.

DEFINIÇÃO 1.32 (dimensão de Hausdorff) *Dado $A \subset X$ definimos a dimensão de Hausdorff de A por $\dim_H(A) = \inf\{d;\ \lambda_d^*(A) < \infty\}$.*

A construção da medida e dimensão de Hausdorff em $\mathbb{R}^n$ foi baseada na definição de bolas utilizando a distância (métrica). Pode-se generalizar para um Espaço Métrico qualquer.

1.9 Exercícios do Capítulo 1: Espaço com Medida

1.9.1 Sigma-Álgebras

1.1. Prove que se Σ é uma σ-álgebra, então é uma álgebra (Tem algo para ser provado? Lei definições com atenção.).

1.2. (parte do Lema 1.2, p.2) Uma σ-álgebra é fechada por interseção enumerável e por diferença entre conjuntos.

1.3. Prove o Lema 1.3, p.3.

1.4. Complete o argumento do Corolário 1.4, p.3.

1.5. Prove que ser fechado por união de 2 elementos implica em ser fechado por união de n elementos mas não implica em ser fechado por união enumerável.

1.6. (exercício de teoria dos conjuntos) Considere $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X e $\Sigma_{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A})$. Determine o domínio e contradomínio de σ.

1.7. Determine se a σ-álgebra de subconjuntos de:
(a) $\mathbb{Q}$ gerada por $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{Q}\}$ é $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$.
(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gerada por $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ é $\mathrm{P}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

1.8. Determine a σ-álgebra de $\mathbb{R}$ gerada por: (a) $\mathrm{P}(\mathbb{N})$; (b) $\mathrm{P}(\mathbb{Q})$.

1.9. Considere $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ é enumerável ou $A^{\complement}$ é enumerável$\}$ e $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ (subconjuntos de $\mathbb{R}$ unitários). Prove que:
(a) $\Sigma \neq \sigma(\mathrm{P}(\mathbb{R}))$. (b) Σ é uma σ-álgebra. (c) $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$.

1.10. Determine a σ-álgebra de $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gerada por:
(a) $\mathcal{A}_1 = \{\{2\}\}$; (b) $\mathcal{A}_2 = \{\{1, 2\}\}$; (c) $\mathcal{A}_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$;
(d) $\mathcal{A}_4 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$; (e) $\mathcal{A}_5 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

1.11. Considere as seguintes famílias de intervalos de $\mathbb{R}$:
$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, a) \mid \ a \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{A}_2 = \{[a, b) \mid \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Prove que para $i = 1, 2$:
(a) todo intervalo $I \in \mathcal{A}_i$ é um conjunto de Borel. (b) $\sigma(\mathcal{A}_i)$ é igual a σ-álgebra de Borel.

1.12. (base enumerável da σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$) Prove que a σ-álgebra de Borel pode ser gerada por $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Conclua que a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ tem gerador enumerável.
Dica: Considere intervalos com coordenadas racionais.

1.13. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que são borelianos em $\mathbb{R}^2$:
(a) $\Omega = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \ t \in [0, 1]\}$ (diagonal de um quadrado de lado 1).
(b) $\Omega_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid \ t \in \mathbb{R}\}$ (gráfico da função).
(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 < 1\}$ (disco unitário).
Dica (b): Definição da integral de Riemann.

1.14. (menor σ-álgebra que contém todos subconjuntos de $\Omega \subset X$) Dado $\Omega \subset X$, defina $\Sigma_\Omega = \{Y \subset X;$ tal que $Y \subset \Omega$ ou $Y^{\complement} \subset \Omega\}$.
(a) Prove que Σ_Ω é σ-álgebra de X. Dica: Se $A \subset \Omega$ e $B^{\complement} \subset \Omega$, então $(A \cup B)^{\complement} \subset \Omega$.
(b) Dado $X = \mathbb{R}$ e $\Omega = \mathbb{Z}$, determine $\Sigma_{\mathbb{Z}}$.
(c) Prove que $\Sigma_\Omega = \sigma(\mathrm{P}(\Omega))$.

1.15. (menor σ-álgebra que contém Σ e um conjunto $A \subset X$) Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Dado $A \subset X$, defina $\Sigma_A = \{(E \cap A) \cup (F \setminus A) \mid \ E, F \in \Sigma\}$. Prove que:
(a) Σ_A é uma σ-álgebra de X. (b) $\Sigma_A = \sigma(\Sigma \cup A)$.
Dica: Prove a união primeiro. Use leis de Morgan para o complementar.

1.16. Considere $A \subset X$ e Σ_A uma σ-álgebra em A. Prove que:
(a) $\{F \subset Y \mid \ F \cap A \in \Sigma_A\}$ é uma σ-álgebra em X.
(b) $\Sigma_A \cup \mathrm{P}(A^{\complement}) = \{E \cup Z \mid \ E \in \Sigma_A, \ Z \subset A^{\complement}\}$ é uma σ-álgebra em X.
(c) As σ-álgebras dos itens (a) e (b) são iguais a $\sigma(\Sigma_A)$.

1.17. Seja Σ uma σ-álgebra. Prove a dicotomia (Σ nunca é infinito enumerável!):
(a) (Σ finito) Existe $M \in \mathbb{N}$, tal que Σ possui 2^M elementos ou
(b) (Σ infinito não-enumerável) A cardinalidade de Σ é maior ou igual a de $\mathrm{P}(\mathbb{N})$.

1.18. Prove que todo $G \subset \mathbb{R}$ aberto pode ser escrito de forma única como a união enumerável de intervalos abertos maximais.
Dica: Para cada $x, y \in G$, defina a relação $x \sim y$ se o intervalo $[x, y] \subset G$ (se $x \leq y$) ou $[y, x] \subset G$ (caso contrário). Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência. Defina $\mathcal{I}$ como o conjunto das classes de equivalência. Prove que existe uma função injetiva de $\mathcal{I}$ em $\mathbb{Q}$. Cada classe é um intervalo aberto.

1.19. Prove que dado $a \in \mathbb{R}$ e um conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}$, $E + a$ é um conjunto de Borel.
Dica: Prove que $\{E + a \mid \ E$ é Borel$\}$ é uma σ-álgebra contendo os intervalos abertos.

1.20. Definimos F_σ com união enumerável de fechados e G_δ como interseção enumerável de abertos. Depois $F_{\sigma\delta}$ é a união de conjuntos F_σ, e $G_{\delta\sigma\delta}$ interseção de G_δ, etc. Assim temos $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}$.
(a) Prove todos estes conjuntos são borelianos da reta.
Obs: Existem borelianos que não são formados deste modo por estarem no limite deste processo. Veja `Suslin_set` na Wikipedia.
Considere $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $P(x, y) = x$, a projeção ortogonal no eixo-x.
(b) Prove que $P(F_\sigma)$ é um boreliano em $\mathbb{R}$.

Obs: Não é verdade que se $E \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto de Borel, $P(E)$ é um conjunto de Borel em $\mathbb{R}$. Lebesgue cometeu este erro! Estudando este erro, Suslin inaugurou a área chamada de "descriptive set theory" em 1917. Ver `Suslin_set` na Wikipedia.

1.9.2 Construindo σ-Álgebra

1.21. Prove que são equivalentes (3 construções dos borelianos do $\mathbb{R}^2$):
(a) σ-álgebra dos borelianos (gerada pelos conjuntos abertos) do $\mathbb{R}^2$.
(b) σ-álgebra gerada pelos retângulos $I_1 \times I_2$ com I_i intervalos da reta.
(c) σ-álgebra gerada pelos conjuntos $B_1 \times B_2$ com B_i borelianos da reta.

1.22. Fixe σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Para cada $f : X \to \mathbb{R}$ abaixo caracterize $\Sigma_{f,X}$ (Def 1.10, p.4).
(a) $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $f(X) = \{1, 2, 3\}$ (imagem de f possui 3 elementos).

1.23. Considere $i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $i(n) = n$.
(a) Fixe em $\mathbb{N}$ a σ-álgebra (trivial) $\mathrm{P}(\mathbb{N})$. Determine $\Sigma_{i,\mathbb{R}}$ (Def 1.10, p.4).
(b) Fixe em $\mathbb{R}$ a σ-álgebra de Borel. Determine $\Sigma_{i,\mathbb{N}}$.

1.24. Considere $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $\pi(x, y) = x$ e $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por $i(t) = (2, t)$ com a σ-álgebra de Borel no domínio e contradomínio. Determine:
(a) $\Sigma_{\pi,\ \mathbb{R}}$. (b) $\Sigma_{\pi,\ \mathbb{R}^2}$. (c) $\Sigma_{i,\ \mathbb{R}^2}$. (d) $\Sigma_{i,\ \mathbb{R}}$.

1.25. Seja Σ uma σ-álgebra em X. Prove que a família:
(a) $A \times X$ com $A \in \Sigma$ é uma σ-álgebra em X^2.
(b) $A \times B$ com $A, B \in \Sigma$ (denota-se $\Sigma \times \Sigma$) não é uma σ-álgebra em X^2.
Observação: Para gerar a σ-álgebra produto em X^2 deve-se considerar a menor σ-álgebra que contém $\Sigma \times \Sigma$. De forma mais geral, dadas σ-álgebras Σ_X e Σ_Y, $\Sigma_X \times \Sigma_Y$ **não** é σ-álgebra.

1.26. (geradores e construções) Seja $\mathcal{A}_X$ um gerador de Σ_X e $\mathcal{A}_Y$ um gerador de Σ_Y.
(a) Prove que a σ-álgebra produto é igual a $\sigma(\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y)$. Por exemplo, os borelianos de $\mathbb{R}^2$ são gerados por produtos $I \times J$ de intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$.
(b) $\Sigma_{f,X}$ é gerada por $f^{-1}(\mathcal{A}_Y)$.
(c) Dado $A \subset X$, $\Sigma_X \cap A$ é gerada por $\mathcal{A}_X \cap A$.

1.27. Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$, Σ_X σ-álgebra em X e Σ_Y em Y. Prove que:
(a) $\Sigma_X \cap A = \{E \cap A \mid \ E \in \Sigma\}$ é uma σ-álgebra em X.
(b) $\Sigma_{f,X} = \{f^{-1}(F) \subset X \mid \ F \in \Sigma_Y\}$ é uma σ-álgebra em X.
(c) $\Sigma_{f,Y} = \{F \subset Y \mid \ f^{-1}(F) \in \Sigma_X\}$ é uma σ-álgebra em Y.

1.28. Dado $A \subset Y$, considere a inclusão natural $i : A \to Y$ definida por $i(a) = a$. Prove que:
(a) Fixado Σ_Y uma σ-álgebra em Y, $\Sigma_{i,A} = \Sigma_Y \cap A$, a σ-álgebra da restrição.
(b) Fixado Σ_A uma σ-álgebra em A, $\Sigma_{i,Y} = \{E \cup Z \mid \ E \in \Sigma_A,\ Z \subset A^{\complement}\} = \Sigma_A \cup \mathrm{P}(A^{\complement})$. Ver Exercício 1.16, p.15.

1.29. Fixe σ-álgebras em X e Y. Sejam π_X e π_Y as projeções naturais de $X \times Y$ em X e Y respectivamente. Prove que a σ-álgebra produto em $X \times Y$ é igual a menor σ-álgebra que contém $\Sigma_{\pi_X, X\times Y}$ e $\Sigma_{\pi_Y, X\times Y}$.

1.30. Fixe $b \in Y$ qualquer. Defina $i : X \to X \times Y$ por $i(x) = (x, b)$ e a projeção canônica $\pi_X : X \times Y \to X$.

Dada σ-álgebra Σ_X em X, prove que:
(a) $\Sigma_{i,X\times Y} = \Sigma_X \times \{b\}$.
(b) $\Sigma_{\pi_X,X\times Y} = \Sigma_X \times Y$. São chamados de **cilindros** (porque?).
(c) Fixada Σ_Y e construída $\Sigma_{X\times Y}$, $\Sigma_X = \Sigma_{i,X} = \Sigma_{\pi_X,X}$.

1.31. Considere a família de funções $S_t : X \to \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$ e fixe a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Queremos construir T_T menor σ-álgebra em X que contém $\Sigma_{S_t,X}$ para todo $t \in [0,T]$. Prove que $\mathsf{T}_T = \sigma\left(\bigcup_{t\in[0,T]} \Sigma_{S_t,X}\right)$. Assim obtemos uma família crescente de σ-álgebras: $\mathsf{T}_T \subset \mathsf{T}_{T'}$ se $T \le T'$. Aplicações: Definição do movimento browniano e em finanças, onde S_t pode ser o valor de uma ação. A família T_T é chamada de filtragem associada ao processo S_t.

1.9.3 Medida

1.32. Verifique se é medida em $(\mathbb{R}, \mathrm{P}(\mathbb{R}))$:
(a) $\mu(E) = 0$ se E é finito ou vazio, $\mu(E) = \infty$ caso contrário.
(b) $\mu(E) = 0$ se E é enumerável ou vazio, $\mu(E) = \infty$ caso contrário.
(c) $\mu(E) = 0$ se E é enumerável ou vazio, $\mu(E) = 1$ caso contrário.
(d) $\mu(E) = 0$ se E é vazio, $\mu(E) = \infty$ caso contrário.

1.33. Considere a σ-álgebra trivial $\mathrm{P}(X)$. Verifique as propriedades (c1) e (c2) da Definição 1.13, p.5 para a medida:
(a) de Dirac do Exemplo 1.11, p.6. (b) de contagem do Exemplo 1.12, p.6
(c) pontual (generalização de Dirac e contagem) da Definição 1.14, p.6.

1.34. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Prove que (Lema 1.15, p.6):
(a) Se E, $F \in \Sigma$ e $E \cap F = \emptyset$, então $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.
Dica: A propriedade é para uniões infinitas, aqui é finita. O que fazer?
(b) Se E, $F \in \Sigma$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \le \mu(F)$.
(c) $\mu(E \cup F) \le \mu(E) + \mu(F)$ para todo E, $F \in \Sigma$.
(d) Se $\langle E_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.
Dica: Seja $F_0 = E_0$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{i<n} E_i$ para $n \ge 1$; então $\langle F_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em
(e) $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$;
Dica: comece com o caso em que todas as medidas são finitas.

1.35. Prove que $E_{n+1} \subset E_n$ para cada n, mas $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \ne \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ em cada item abaixo:
(a) Considere $X = \mathbb{N}$, μ a medida de contagem do Exemplo 1.12, p.6.
Defina $E_n = \{i \in \mathbb{N} \mid \ \ i \ge n\}$.
(b) Considere $X = \mathbb{R}$, μ a medida de Lebesgue (comprimento do intervalo). Defina $E_n = (n, \infty)$.

1.36. Suponha que μ é finitamente aditiva mas não necessariamente σ-aditiva e que $\mu(\Omega) < \infty$. Prove que μ é σ-aditiva se, e somente se, é contínua no vazio, isto é, se $\langle E_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em Σ (isto é, $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$

Dica: Ver Lema 1.15, p.6.

1.37. Seja X conjunto enumerável, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dado espaço com medida $(X, \mathrm{P}(X), \mu)$, prove que existe sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $\mu(E) = \sum_{n\in I_E} a_n$ (somatório vazio por convenção vale 0) para todo $E \subset X$ com $I_E \subset \mathbb{N}$ definido por $I_E = \{k \in \mathbb{N};\ x_k \in E\}$.

1.38. (restrição) Dado espaço com medida (X, Σ, μ) e $A \in \Sigma$, defina $\lambda(A) = \mu(A \cap E)$. Pelo Exercício 1.27, p.16 $\Sigma \cap E$ é uma σ-álgebra. Prove que $(X, \Sigma \cap E, \lambda)$ é um espaço com medida, a restrição da medida μ a E.

1.39. (push-forward de medida) Dado espaço com medida (X, Σ_X, μ) e função $f : X \to Y$, defina $\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E))$. Pelo Exercício 1.27, p.16 $\Sigma_{f,Y} = \{A \subset Y \mid \ f^{-1}(A) \in \Sigma_X\}$ é uma σ-álgebra em Y. Prove que $(Y, \Sigma_{f,Y}, \lambda)$ é um espaço com medida, o push-forward da medida de X para Y. Denotamos $\lambda = f_*(\mu)$.

1.40. Considere $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Fixe em $[0, 2\pi]$ a medida de Lebesgue μ. Identifique a medida $f_*(\mu)$ em $\mathbb{R}^2$, o push-forward definido no Exercício 1.39.

1.41. Considere $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definido por $f(t) = 0$ para todo t. Fixe em $[0, 1]$ a medida de Lebesgue μ. Identifique a medida $f_*(\mu)$ em $\mathbb{R}$, o push-forward definido no Exercício 1.39.

1.42. Considere $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definido por $f(t) = t/2$ para todo t. Fixe em $[0, 2]$ a medida de Lebesgue μ. Identifique a medida $f_*(\mu)$ em $\mathbb{R}$, o push-forward definido no Exercício 1.39.

1.43. Fixados (X, Σ), prove que o conjunto das medidas forma um espaço vetorial.

1.44. Considere μ_h a medida pontual do Exemplo 1.14, p.6 com $h = |\operatorname{sen}|$. Então $\mu_h(A) = 0$ se, e somente se, A .... (complete a lacuna).

1.45. Considere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos de medida nula. Prove que:

(a) Se $B \subset A_1$, então B tem medida nula.

(b) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ tem medida nula.

Dica: Você **não** pode escrever $\mu(A_n)$ (porque?). Releia Definição 1.16, p.7.

1.46. Prove que para a medida:

(a) de contagem, o único conjunto de medida nula é o $\emptyset$;

(b) δ_a de Dirac, um conjunto A possui medida nula se, e somente se, $a \notin A$.

1.47. Explique o significado das expressões abaixo para a medida de contagem e para a medida δ_a de Dirac:

(a) $f = 0$ quase todo ponto; (b) $f > 0$ quase todo ponto.

1.48. Considere μ_h a medida pontual do Exemplo 1.14, p.6 com $h = I_{\{x>0\}}$. Determine se é Verdadeiro ou Falso:

(a) $I_{\{x<-3\}} = 0$ μ_h-qtp; (b) $I_{\{x<1\}} = I_{\{0\leq x<1\}}$ μ_h-qtp.

1.49. Considere μ_h a medida pontual do Exemplo 1.14, p.6. Chamamos de **suporte** de uma função f o conjunto dos pontos onde f se anula. Utilize o conceito de suporte para determinar condições equivalentes a:

(a) $\mu_h(A) = 0$; (b) $g = 0$ qtp. com relação a μ_h.

1.50. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Defina a relação entre funções $f \sim g$ se $f = g$ qtp. Prove que esta relação é de equivalência.

1.51. Complete a prova do Lema 1.19, p.8. Prove que:

(a) $\widetilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra.

Dica: Para o complementar, se $Z \subset B \in \Sigma$, $(E \cup Z)^{\complement} = (E \cup B)^{\complement} \cup (B \setminus Z)$.

(b) $\widetilde{\mu}$ está bem definida e é uma medida.

Dica: se $E \cup Z = \bar{E} \cup \bar{Z}$, defina $H = E \cap \bar{E}$ e prove que $E \setminus H \subset \bar{Z}$ e $\bar{E} \setminus H \subset Z$

(c) $(X, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ é completo.

1.52. (convergência dominada para conjuntos) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Seja $E_1, E_2, \ldots$ uma sequência de elementos de Σ que converge para E no seguinte sentido: Para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} I_{E_n}(x) = I_E(x)$.

(a) Prove que $E \in \Sigma$.

(b) Se existe $F \in \Sigma$ com $\mu(F) < \infty$ tal que $E_n \subset F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.

Dica: Considere $\bigcup_{n>N}(E_n \triangle E)$.

1.53. Definimos o limsup e o liminf de uma sequência de conjuntos por:

$$A_{\textsf{sup}} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad \text{e} \quad A_{\textsf{inf}} = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

Caso $A_{\textsf{sup}} = A_{\textsf{inf}}$ definimos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_{\textsf{sup}}(= A_{\textsf{inf}}).$$

Calcule limsup e liminf para:

(a) $A_n = (0, n)$; (b) $B_n = (n, \infty)$; (c) $C_n = \{(-1)^n\}$;
(d) $D_n = (-1/n, 1/n)$; (e) $E_n = (0, n \bmod 3)$; (f) $F_n = (n \bmod 4, n \bmod 6]$

Obs: Não é necessário topologia (noção de convergência) para estas definições.

1.54. Prove que:

(a) $A_{\textsf{inf}} \subset A_{\textsf{sup}}$;

(b) $A_{\textsf{sup}} = \{x; \quad x \in A_n$ para uma infinidade de n's$\}$;

(c) $A_{\textsf{inf}} = \{x; \quad x \in A_n$ para todo $n > N_0\}$;

(d) se $A_n \subset A_{n+1}$ então $A_{\textsf{sup}} = A_{\textsf{inf}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

(e) se $A_{n+1} \subset A_n$ então $A_{\textsf{sup}} = A_{\textsf{inf}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.55. (Lema de Fatou e Teorema da Convergência dominada para conjuntos) O objetivo é mostrar, essencialmente, que se $E_n \to E$ $(E_n, E \in \Sigma)$ no sentido dos exercícios anteriores, então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.

(a) Prove que $\mu(\liminf E_n) \le \liminf \mu(E_n)$ (Lema de Fatou para conjuntos).

(b) Prove que $\limsup \mu(E_n) \le \mu(\limsup E_n)$ se $\mu(\cup E_n) < \infty$.

(c) Conclua que Se $E_n \to E$ $(E_n, E \in \Sigma)$ no sentido dos exercícios anteriores ($\limsup E_n = \liminf E_n$) e $\cup E_n \subset F$ com $\mu(F) < \infty$ (F domina a sequência E_n), então $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$ (Teorema da Convergência dominada de Lebesgue para conjuntos).

1.56. (Lema de Borel-Cantelli) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Seja $E_1, E_2, \ldots$ uma sequência de elementos de Σ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Prove que quase todo $x \in X$ pertence no máximo a um número finito de E_n's, i.e., $A(x) = \{n \in \mathbb{N};\ x \in E_n\}$ é finito para quase todo x, isto é, $\mu(\limsup E_n) = 0$.

1.9.4 Medida com Sinal (Cargas)

1.57. Se λ é carga e $E \subset F$, ambos mensuráveis, $\lambda(E) \leq \lambda(F)$.

1.58. Prove que se μ_1, μ_2 são medidas finitas então $\lambda = \mu_1 - \mu_2$ é uma carga.

1.59. Se λ é uma carga e $E_n \in \Sigma$ disjuntos, então a série $\sum_n \lambda(E_n)$ é incondicionalmente convergente.

1.60. Se λ é uma carga defina $\mu(E) = \sup \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)|$ com E_i disjunto e $E = \cup_{i=1}^n E_i$. Prove que μ é medida (variação de λ).

1.61. Se λ é uma carga defina $\mu(E) = \sup \lambda(A)$ com $A \subset E$, $A \in \Sigma$. Prove que μ é medida. Dica: Dado $\varepsilon > 0$, considere a sequencia F_n tal que $\mu(E_n) \leq \lambda(F_n) + 2^{-n}\varepsilon$.

1.9.5 Medida Exterior e Método de Carathéodory

1.62. Defina $\theta^*(A) = 0$ se $A = \emptyset$, $\theta^*(A) = 1$ caso contrário.
(a) Prove que é medida exterior.
(b) Qual a σ-álgebra e a medida gerada pelo Método de Carathéodory?

1.63. Prove que sempre é verdade que:
(a) $\theta^*(E) \leq \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A)$.
(b) se $\theta^*(E) = \infty$, então $\theta^*(E) = \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A)$.
Conclua que para provar igualdade basta mostrar que $\theta^*(E) \geq \theta^*(E \cap A) + \theta^*(E \setminus A)$ para $\theta^*(E) < \infty$.

1.64. O objetivo é contrastar o fato que a monotonicidade da medida ($E \subset F$ implica $\mu(E) \leq \mu(F)$) segue da σ-aditividade mas na medida exterior é parte da definição (Definição 1.23, p.9).
(a) Prove que se μ é medida, então $E \subset F$ implica $\mu(E) \leq \mu(F)$.
(b) Imite argumento anterior para tentar provar que se θ^* é medida exterior, então $E \subset F$ implica $\theta^*(E) \leq \theta^*(F)$ utilizando apenas a propriedade (c) da medida exterior (Definição 1.23, p.9).

1.65. Para $A \subset \mathbb{N}$ defina $\mu^*(A) = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \#\{A \cap \{1, 2, \dots, n\}\}$.
(a) Prove que é medida exterior.
Determine:
(b) $\mu^*(\text{pares})$. (c) $\mu^*(3\mathbb{N})$. (d) $\mu^*(\text{primos})$.
(e) Qual a σ-álgebra e a medida gerada pelo Método de Carathéodory por μ^*?

1.66. Seja θ^* uma medida exterior em X, μ a medida definida pelo método de Carathéodory. Prove que se $\theta^*(A) = 0$, então A é μ-mensurável com medida zero. Conclua que μ é completa no sentido da Definição 1.17, p.7.

1.67. (direção contrária ao do texto: uma medida gera uma medida exterior) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Para $A \subset X$ defina

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid \quad E \in \Sigma,\ A \subset E\}.$$

Prove que:
(a) existe $E \in \Sigma$ tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = \mu^*(A)$.
(b) μ^* é uma medida exterior em X.

1.9.6 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

1.68. Dentro do espaço de medida dos borelianos, dê exemplo de um conjunto de medida nula que não seja mensurável.

1.69. Explique qual a diferença entre a σ-álgebra de Borel e de Lebesgue.

1.70. Seja $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos irracionais. Prova que a medida de Lebesgue de $\mathcal{I}$ é ∞.

1.71. Considere $q_i \in \mathbb{Q}$ uma enumeração dos racionais. Defina I_i como o intervalo centrado em q_i com raio 2^{-i}. Prove que $\bigcup_i I_i \neq \mathbb{R}$. Isto contradiz o fato que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$?

1.72. Prove que $A \subset \mathbb{R}$ tem **medida** de Lebesgue **nula** pela Definição 1.16, p.7 se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos e limitados tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| \leq \varepsilon,$$

sendo que $|I| = b - a$ se $I = (a, b)$ (Definição 1.28, p.12).

1.73. Dê exemplo de um espaço de medida que não seja completo.

1.74. Identifique uma função contínua em $\mathbb{R}$ que seja igual quase todo ponto com relação a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ a cada uma das funções abaixo:
(a) $I_{\mathbb{N}}$; (b) $I_{\mathbb{Q}}$; (c) $I_{\mathbb{Q}^\complement}$; (d) $I_{[0,1]}$.

1.75. Considere (a medida exterior de Lebesgue) θ^* da Definição 1.25, p.11. Prove que:
(a) θ^* é uma medida exterior.
(b) $\theta^*([a, b)) \leq b - a$. Provar a igualdade é uma questão mais delicada (consulte literatura).

1.76. Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Prove que:
(a) $\mu(\{ a \}) = 0$ para todo $\in \mathbb{R}$; (b) $\mu(K) = 0$ para todo K enumerável;
(c) $\mu([a, b]) = \mu((a, b)) = \mu([a, b))$; (d) $\mu((a, +\infty)) = \infty$.

1.77. Prove que se E é aberto não-vazio, $\lambda(E) > 0$. Se K é compacto, $\lambda(K) < \infty$.

1.78. Prove que $\mathbb{Q}$ é pequeno do ponto de vista da medida de Lebesgue mas grande do ponto de vista da cardinalidade.

1.79. Seja $A \subset \mathbb{R}$ qualquer. Prove que dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $G_\varepsilon \supset A$ com $\theta^*(G_\varepsilon) \leq \theta^*(A) + \varepsilon$.

1.80. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $X \subset [a, b]$ com medida nula com relação a medida de Lebesgue. Prove que $f(X)$ tem medida nula com relação a medida de Lebesgue se f é Lipschitz ou Hölder contínua.

Dica: estime $\operatorname{diam}(f(I))$ para I um intervalo qualquer.

1.81. Com relação ao conjunto de Cantor C prove que:
(a) é não-enumerável e possui medida nula de Lebesgue.
(c) se $A \subset C$, então A é mensurável.
(c) se L é a σ-álgebra de Lebesgue, card$(\mathrm{P}(\mathbb{R})) \leq$ card(L).

1.82. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ (vale em $\mathbb{R}^n$) e $d(A, B) > 0$ então $\theta^*(A \cup B) = \theta^*(A) + \theta^*(B)$, onde θ^* é a medida exterior de Lebesgue.

1.83. (diversos resultados importantes da medida exterior de Lebesgue) Considere θ^* a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Dados $c \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$ defina $A + c = \{x + c \mid \quad x \in A\}$ e $cA = \{cx \mid \quad x \in A\}$.

Seja I é um intervalo aberto. Prove que:

(a) $\theta^*(I) = |I|$. (b) I pertence a σ-álgebra gerada pelo método de Carathéodory.

Dica: Dado E, considere I_n tal que $\theta^*(E) = \lim_n |I_n|$. Use (a)

Prove que A é mensurável a Lebesgue se, e somente se:

(c) cA é mensurável a Lebesgue para algum $c > 0$.

(d) $A + c$ (translação) é mensurável a Lebesgue.

Prove que (segue o mesmo para a medida de Lebesgue):

(e) $\theta^*(A + c) = \theta^*(A)$ (invariância por translação). (f) $\theta^*(kA) = k\,\theta^*(A)$ para $k > 0$.

Dica: comece com intervalos abertos. Depois prove que $\theta^*(A+x) \le \theta^*(A)+\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ e (usando este resultado) $\theta^*(A) = \theta^*((A + x) + (-x)) \le \theta^*(A + x)$.

1.84. Considere a relação em $\mathbb{R}$: $a \sim b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$.

(a) Prove que é relação de equivalência.

(b) Defina $\mathcal{V}$ (**conjunto de Vitali** definido em 1905) como o conjunto formado por um elemento de cada classe de $[0, 1]/\mathbb{Q}$. Seja $\mathcal{V}_q = q + \mathcal{V}$. Prove que se $q \ne \widetilde{q}$ (com $q, \widetilde{q} \in \mathbb{Q}$) então $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{V}_{\widetilde{q}} = \emptyset$.

(c) Prove que $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{V}_q$.

(d) Prove que $\mathcal{V}$ é não-enumerável.

(e) Prove que $[0, 1] \subset \bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \mathcal{V}_q \subset [-1, 2]$.

(f) Prove que $\mathcal{V}$ não é mensurável.

Dica: Como $\mathcal{V}_q$ é translação de $\mathcal{V}$, ambos possuem mesma medida. Como por (b) os $\mathcal{V}_q$ são disjuntos, a medida da união é igual a soma das medidas. Por (e) a medida da união dos conjuntos de Vitali estaria entre 1 e 3. A medida de $\mathcal{V}$ não pode ser zero nem positiva! Contradição. Ver Wikipedia, Vitali set.

Obs: Note que a invariância por translação e o axioma da escolha são barreiras insuperáveis para se atribuir medida para todo subconjunto de $\mathbb{R}$.

1.85. Vamos estudar a medida exterior de Lebesgue de um conjunto de Vitali V. Prove que:

(a) É possível construir um conjunto de Vitali que está contido em $[0, \varepsilon]$ para qualquer $\varepsilon > 0$ dado. Assim a medida exterior pode ser tão pequena quanto se queira. Note que o conjunto não é bem definido pois é construído pelo axioma da escolha.

(b) A medida exterior de Lebesgue de V é maior que zero.

(c) Dado $m > 0$ existe conjunto não-mensurável a Lebesgue com medida exterior m.

Dica: mudança de escala no Vitali.

1.86. Considere μ a medida de Lebesgue e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua com $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que para todo E mensurável:

(a) $f(E)$ é um conjunto mensurável;

(b) $\mu(f(E)) \le K\mu(E)$.

Dica: Prove inicialmente para intervalos.

1.87. Prove que E é Lebesgue mensurável se, e somente se, (veja definição de G_δ e F_σ no Exercício 1.20, p.15)

(a) existe $G \in G_\delta$, $E \subset G$ com $\theta^*(G \setminus E) = 0$.

(b) existe $F \in F_\sigma$, $F \subset E$ com $\theta^*(E \setminus F) = 0$.
(c) para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto O_ε tal que $\theta^*(O_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$.
Dica: Veja Royden p.63.

1.9.7 Medida de Lebesgue-Stieltjes e de Hausdorff

1.88. Suponha que g é contínua. Prove que μ_g^* da Definição 1.30, p.13 é medida exterior em $\mathbb{R}$.

1.89. Determine $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a medida de Lebesgue-Stieltjes tenha as seguintes propriedades: $\mu_g(\{1\}) = 2$, $\mu_g([1,3]) = 4$, $\mu_g(\{1\}) = 2$, $\mu_g([3,+\infty)) = 0$, $\mu_g([-x,0)) = x/\pi$.

1.90. Se $g(x) = \lceil x \rceil$ (maior parte inteira). Descreva e medida de Lebesgue-Stieltjes gerada. Qual a σ-álgebra associada gerada pelo Teorema de Carathéodory?

1.91. Defina $g(c^+) = \lim\limits_{x \to c^+} g(x)$ e $g(c^-) = \lim\limits_{x \to c^-} g(x)$. Com relação à medida de Lebesgue-Stieltjes μ_g da Definição 1.30, p.13:
(a) Prove que $\mu_g(\{c\}) = g(c^+) - g(c^-)$.
(b) Prove que $\mu_g((a,b)) \le g(b^-) - g(a^+)$. Na realidade são iguais mas é mais delicada.
(c) Se $g = I_{[0,\infty)}$, determine μ_g.

1.92. Estude a função de Cantor (Wikipedia: `Cantor_function`) e a medida de Lebesgue-Stieltjes (singular) gerada por ela.

Dica: Ela está concentrada no conjunto de Cantor. Utilize base 3 para entender o comprimento de intervalos.

1.93. Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ e sejam $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medidas tais que $\nu_1(I) = \nu_2(I) < \infty$ para todo intervalo aberto $I = [a,b) \subset \mathbb{R}$. Prove que $\nu_1(E) = \nu_2(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

1.94. Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ e $\nu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ uma medida tal que $\nu[-n,n] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é crescente tal que $\nu(E) = \mu_g(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$, onde μ_g é definida na Definição 1.30, p.13. A função g é única?

Dica: $g(x) = \nu((-\infty,x])$, chamada em probabilidade de cdf (cumulative distribution function).

1.95. Prove que se g é crescente então o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é enumerável. Conclua que $g = h + j$, com h contínua e j constante entre cada ponto de descontinuidade.

1.96. Com relação a medida exterior de Hausdorff λ_d^*.
Considere $A = \{1,2\}$. Determine: (a) $\lambda_0^*(A)$. (b) $\lambda_{1/2}^*(A)$.

Considere $B = (0,1) \subset \mathbb{R}$ (intervalo). Determine: (c) $\lambda_{1/2}^*(B)$. (d) $\lambda_1^*(B)$. (e) $\lambda_2^*(B)$.
Prove que (f) $\dim_H(B) \le 1$. (g) $\dim_H(\mathbb{R}) = 1$.

1.97. Com relação a medida exterior de Hausdorff λ_d^*.
(a) Prove que $\lambda_s^*(A) \le \lambda_r^*(A)$ se $s \ge r$ (λ_s é monótona decrescente).
(b) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ então $0 \le \dim_H(A) \le n$.
(c) Se A é um conjunto enumerável então $\dim_H(A) = 0$ (recíproca não é verdadeira).
(d) Prove que A é finito se, e somente se, $\lambda_0^*(A) < \infty$.

1.98. Prova que a media exterior de Hausdorff em $\mathbb{R}^n$ é invariante por translação.

Capítulo 2

Integração

A troca de ordem entre a integral de Riemann e o limite de sequência de funções ocorre sob condições fortes (por exemplo convergência uniforme). Esta troca é importante, por exemplo, no estudo da série de Fourier. Isto impulsionou o desenvolvimento da integral de Lebesgue, com hipóteses mais fracas e de fácil verificação (por exemplo o Teorema da Convergência Dominada) para saber se é possível trocar o limite com a integral. Esta superioridade da integral de Lebesgue se deve a ser, num paralelo com séries, "absolutamente convergente", enquanto a integral de Riemann é "condicionalmente convergente". Ver p. 35 e Obervação 2.10, p.30.

A **integral de Lebesgue** estende (em intervalos limitados) a integral de Riemann para uma classe maior de funções e além disso permite definir integrais sobre espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Na Seção 2.4, p.32 comparamos a integral de Riemann com a de Lebesgue.

A teoria de integração sobre um espaço de medida geral (que inclui a integral de Lebesgue como um exemplo) que apresentamos neste livro consiste de:

i. uma teoria de conjuntos mensuráveis (a σ-álgebra);

ii. uma teoria de medida de conjuntos mensuráveis;

iii. uma teoria de funções mensuráveis;

iv. uma teoria de integral de funções mensuráveis.

Este é um caminho possível, mas não é o único. É possível construir a Teoria de Integração sem Teoria da Medida e utilizar a integral para definir a medida. Para detalhes ver a Seção 2.8, p.38.

Os teoremas mais importantes são:

- Teorema da Convergência Monótona;
- Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue;
- Teorema de Radon-Nikodým;
- Teorema de Fubini.

2.1 Função Mensurável

Uma função é dita mensurável se a imagem inversa de todo conjunto mensurável é um conjunto mensurável. São funções "bem comportadas", que preservam a estrutura dos espaços de medida. A função ser mensurável depende somente da σ-álgebra (não depende de medida) mas tipicamente a σ-álgebra é gerada pelo método de Carathéodory (Seção 1.6, p.9), que depende da medida exterior. Assim, neste caso, a função ser mensurável depende somente da medida exterior. Prova-se a existência de funções não-mensuráveis por métodos não-construtivos.

DEFINIÇÃO 2.1 (Função real Mensurável) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é chamada de* **Σ-mensurável**, *ou simplesmente* **mensurável**, *se satisfaz:*

$$\{f < a\} = \{x \in X \mid \; f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a)) \in \Sigma \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Se Σ é a σ-álgebra de:
(a) Borel, então f é dita **Borel-mensurável**;
(b) Lebesgue, então f é dita **Lebesgue-mensurável**.

Observação 2.1 *Observe a conveniência da notação $\{f < a\}$, utilizada em Probabilidade.*

Exemplo 2.1 *(triviais)*
(a) Qualquer função constante é mensurável.
(b) Se $\Sigma = \mathrm{P}(X)$, então toda função é mensurável.
(b) Se $E \in \Sigma$, I_E é Σ-mensurável.
(c) Se g é Borel-mensurável, então g é Lebesgue mensurável.

Exemplo 2.2 *(importantes, veja exercícios)*
(a) Toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável.
(b) Toda função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável.

Observação 2.2 *Nem todas funções Borel-mensuráveis são contínuas. Mas, pelo Teorema de Luzin[1] ([1]), se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável, dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $E \subset [a, b]$ tal que f restrita a E é contínua e $\mu(E^{\complement}) < \varepsilon$.*

LEMA 2.2 *Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Então para qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) $\{f < a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$; *(b) $\{f \leq a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$;*
(c) $\{f > a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$; *(d) $\{f \geq a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Prova: Exercício para o leitor. ■

O proximo Teorema mostra que o conjunto das funções mensuráveis forma um Espaço Vetorial (preserva combinações lineares) e uma Álgebra (preserva produto de funções).

TEOREMA 2.3 (Propriedades de Funções Mensuráveis I) *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções Σ-mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. São Σ-mensuráveis:*
(a) cf; *(b) $f + g$;* *(c) f^2;* *(d) fg;* *(e) $|f|$.*

[1] Nikolai Luzin: 1883 Irkutsk, Russia – 1950 Moscow, USSR.

Prova:

(a) Seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Se $c = 0$, então $\{x \in X \mid \ cf(x) < a\}$ é X ou $\emptyset$, e portanto pertence a Σ. Se $c > 0$, então

$$\{x \in X \mid \ (cf)(x) < a\} = \left\{x \in X \mid \ f(x) < \frac{a}{c}\right\} \in \Sigma.$$

O caso $c < 0$ é similar. Como a é arbitrário, cf é mensurável.

(b) Por hipótese, se $r \in \mathbb{Q}$, então

$$S_r = \{x \in X \mid \ f(x) < r\} \cap \{x \in X \mid \ g(x) < a - r\} \in \Sigma.$$

Como claramente $\{x \in X \mid \ (f+g)(x) < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$, segue que $(f+g)$ é mensurável.

(c) Exercício. (d) Segue de (a), (b) e (c) pois $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$. (e) Exercício. ■

O próximo resultado mostra que as funções mensuráveis são bem comportadas com relação a convergência pontual de sequências de funções.

TEOREMA 2.4 (Propriedades de Funções Mensuráveis II) *Seja $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções Σ-mensuráveis de X em $\mathbb{R}$. São Σ-mensuráveis:*

(a) $\lim_{n \to \infty} f_n$; *(b)* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$; *(c)* $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$; *(d)* $\limsup_{n \to \infty} f_n$; *(e)* $\liminf_{n \to \infty} f_n$.

Prova: Para $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ defina $H_n(a) = \{x \mid \ f_n(x) \le a\} \in \Sigma$. A prova segue dos seguintes fatos:

(a) $\{x \in X \mid \ (\lim_{n \to \infty} f_n)(x) \le a\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \ge n} H_m(a + 2^{-k})$;

(b) $\{x \in X \mid \ (\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) \le a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n(a)$;

(c) $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}}(-f_n)$;

(d) $\limsup_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} f_{m+n}$;

(e) $\liminf_{n \to \infty} f_n = -\limsup_{n \to \infty}(-f_n)$. ■

Observação 2.3 *É verdade também que a composição de uma função contínua com uma mensurável é mensurável, mas a composição de duas funções mensuráveis pode não ser mensurável.*

Uma função não ser mensurável implica na existência de um conjunto que não é mensurável. Como já observamos, quase todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é mensurável a Lebesgue. Portanto, quase toda função que você encontrará será mensurável a Lebesgue. O contraexemplo padrão é a função indicadora de um conjunto não-mensurável.

Generalizamos a definição de função mensurável entre espaços quaisquer.

DEFINIÇÃO 2.5 (Função Mensurável) *Se Σ_X é uma σ-álgebra em X e Σ_Y é uma σ-álgebra em Y, dizemos que $f : X \to Y$ é* **mensurável** *se*

$$f^{-1}(E) \in \Sigma_X \quad \text{para todo} \quad E \in \Sigma_Y.$$

Se $\mathcal{A}$ gera a σ-álgebra Σ_Y, pelo Exercício 2.15, p.40, é equivalente exigir que

$$f^{-1}(E) \in \Sigma_X \quad \text{para todo} \quad E \in \mathcal{A}.$$

Observação 2.4 *Se $Y = \mathbb{R}$ e Σ_Y é a σ-álgebra de Borel reobtemos a Definição 2.1.*

Observação 2.5 *Note a semelhança com a definição de função contínua em um espaço topológico: $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se,*

$$f^{-1}(E) \text{ é aberto em } X \text{ para todo aberto } E \text{ em } Y.$$

2.2 Definição da Integral

Definimos integral em três etapas:

i. integral de funções simples (Definição 2.8, p.28);

ii. integral de funções não-negativas (Definição 2.10, p.29);

iii. integral de função real mensurável qualquer (Definição 2.13, p.30).

Estas etapas são um roteiro para se provar resultados: provamos para funções simples, depois para não-negativas e finalmente para uma função mensurável qualquer.

DEFINIÇÃO 2.6 *Dado $A \subset X$, definimos sua* **função indicadora** *ou* **característica** $I_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ *por* $I_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin A, \\ 1, & \text{se } x \in A. \end{cases}$

DEFINIÇÃO 2.7 (Função Simples) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma* **função simples** *se $f = \sum_{i=0}^{n} a_i I_{E_i}$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $E_i \in \Sigma$.*

Observação 2.6 *A representação de uma função simples não-nula f com $\sum_{i=0}^{n} a_i I_{E_i}$ é única se os a_i's são não-nulos e únicos e se os E_i's são disjuntos (exercício).*

DEFINIÇÃO 2.8 (Integral de uma função simples) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função simples, isto é, $f = \sum_{i=0}^{m} a_i I_{E_i}$. Definimos a* **integral da função simples** *f com relação a medida μ (pode ser ∞!) por*

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=0}^{m} a_i \mu(E_i).$$

A dificuldade desta definição é que uma função simples f possui mais de uma representante e temos que provar que o valor no lado direito independe do representante que nós escolhemos para f. O próximo Lema garante isso.

LEMA 2.9 *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Se*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i I_{E_i} = \sum_{j=0}^{n} b_j I_{F_j},$$

onde todos os E_i *e* F_j *são mensuráveis e* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$*, então*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \mu(E_i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \mu(F_j).$$

Prova: Ver [1]. Exploramos em exercícios alguns aspectos deste lema técnico. ■

Vamos definir a integral de funções não-negativas usando funções simples.

DEFINIÇÃO 2.10 (Integral de funções não-negativas) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $f \geq 0$ *uma função* Σ*-mensurável. Definimos a* **integral da função não-negativa** f *com relação a medida* μ *(pode ser* ∞*!) por*

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int g\, d\mu \mid \ g \text{ é uma função simples e } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

É comum integrarmos uma função em um subconjunto de um espaço de medida; por exemplo integrar $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, com $a < b$ em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 2.11 (Integração em Subconjuntos) *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida,* $H \in \Sigma$*, e* $f \geq 0$ *uma função* Σ*-mensurável. Definimos*

$$\int_H f\, d\mu = \int \widetilde{f}\, d\mu, \quad \text{onde } \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in H, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus H. \end{cases}$$

Exemplo 2.3 $\displaystyle\int_H 1\, d\mu = \mu(H)$.

Observação 2.7 *É fácil ver que (Exercício 2.11, p.40)* $\widetilde{f} = f \cdot I_H$ *é* Σ*-mensurável.*

Assim, $\displaystyle\int_a^b f\, d\mu = \int_{[a,b]} f\, d\mu = \int f \cdot I_{[a,b]}\, d\mu.$

DEFINIÇÃO 2.12 *Definimos a parte positiva* f^+ *e a parte negativa* f^- *de uma função* f *por*

$$f^+(x) = \max(0, f(x)), \qquad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

Assim, $f = f^+ - f^-$ *com* $f^+, f^- \geq 0$.

Observação 2.8 *Pelo exercício 2.11, p.40, se* f *é mensurável, então* f^+ *e* f^- *são mensuráveis.*

DEFINIÇÃO 2.13 (Integral) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Σ-mensurável. Definimos a* **integral da função** *f com relação a medida μ (pode ser $+\infty$ ou $-\infty$, ver observação) por*

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

Se $H \in \Sigma$, definimos

$$\int_H f\, d\mu = \int_H f^+\, d\mu - \int_H f^-\, d\mu.$$

Observação 2.9 *Se as integrais dos componentes positivo (f^+) e negativo (f^-) de f são ∞ então a definição acima não faz sentido ($\infty - \infty$). Neste caso dizemos que f não é integrável. Se somente uma das duas integrais é ∞, dizemos que a integral é $+\infty$ ou $-\infty$.*

Observação 2.10 (Integral de Lebesgue é Absolutamente Convergente) *Como pedimos que a parte positiva e negativa de uma função seja integrável, a integral de Lebesgue é "absolutamente convergente" (no sentido de séries), pois uma função f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável.*

Pelo próximo Teorema a integral é um operador linear e monotônico.

TEOREMA 2.14 (Propriedades básicas da integral) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções integráveis. (a) Se $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int (cf + g)\, d\mu = c \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ (linearidade).*

(b) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, então $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$ (monotonicidade).

(c) se $E, F \in \Sigma$, $E \subset F$ e $f \geq 0$, então $\displaystyle\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$ (monotonicidade).

(d) $|f|$ é integrável e $\displaystyle\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$. Se $\displaystyle\int |f|\, d\mu = 0$, então $f = 0$ μ-qtp.

Prova: Ver Exercício 2.23 e 2.24, p.41. ∎

DEFINIÇÃO 2.15 *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções Σ-mensuráveis. Dizemos que f e g são* **equivalentes** *se $f = g$ μ-qtp.*

É claro que esta relação é de equivalência (Exercício 1.50, p.18). A integral "não enxerga" a diferença entre as funções f e g equivalentes. Fisicamente, por exemplo, uma força f e g equivalentes vão realizar o mesmo trabalho. Assim, na definição dos espaços funcionais L^p e L^∞, vamos falar na função f querendo dizer num representante qualquer da classe de equivalência a que a função pertence. Assim como números racionais são classes de equivalência e dizemos "considere o número racional $1/2$" ao invés de dizer "considere a classe de equivalência de $1/2$", vamos falar na função f em L^p ao invés de dizer classe de equivalência a que f pertence.

DEFINIÇÃO 2.16 *O conjunto $L^p(X) = L^p(X, \Sigma, \mu)$, para $1 \leq p < \infty$, é formado pelas funções $f : X \to \mathbb{R}$ que são Σ-mensuráveis com integral $\int |f|^p\, d\mu$ finita.*

O conjunto $L^\infty(X) = L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ é formado pelas funções $f : X \to \mathbb{R}$ que são Σ-mensuráveis e limitadas μ-qtp, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mu\{|f| > M\} = 0$.

Estes espaços são **Espaços Vetoriais Normados** (EVNs) (EV pelo Teorema 2.14; normado pela desigualdade de Minkovsky) se introduzimos a norma:

(a) em L^p $(1 \le p < \infty)$: $\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$;

(b) em L^∞: $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M > 0 \mid \ \mu\{|f| > M\} = 0\}$ (chamado de sup essencial).

Com estas normas (por ser a integral de Lebesgue, em decorrência do Teorema da Convergência Dominada) eles são EVNs completos, ou seja, são **Espaços de Banach**.

Observação 2.11 *Se utilizássemos a integral de Riemann este espaço NÃO seria completo. Esta é uma razão técnica da importância da integral de Lebesgue. Com seu completamento obteríamos o L^p de outro modo.*

Particularizando para o L^2, o membro mais importante desta família de espaços de funções, podemos definir o produto interno (forma bilinear):

$$(f, g) = \int fg \, d\mu.$$

Com isto, L^2 será um EVN completo com norma induzido por um produto interno, que chamamos de **Espaço de Hilbert**. Este é um espaço importante onde a Teoria da série de Fourier se desenvolve. Além disso a teoria de equações diferenciais parciais se desenvolve nos chamados **Espaços de Sobolev**, espaços que envolvem a existência de derivadas (num sentido mais fraco) limitadas nestas normas integrais. Deste modo passamos do espaço das funções contínuas ($C(X)$) ou suaves ($C^n(X)$) para espaços de Banach, Hilbert e Sobolev.

Exemplo 2.4 *(verifique!)*

(a) A função $1/x \notin L^1(1, \infty)$ mas pertence a $L^p(1, \infty)$ para $p > 1$.

(b) A função $1/x \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

(c) A função $f(x) = \frac{I_{\mathbb{N}}(x)}{x}$ pertence a $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.3 Teoremas de Convergência

Nesta seção apresentamos os principais resultados da Teoria de Integração, os Teoremas da convergência monótona e da convergência dominada (de Lebesgue). Estes teoremas fornecem condições (simples) para que possamos trocar o limite com a integral, isto é, condições para que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu\right) = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \, d\mu.$$

Embora a teoria seja mais complicada, as condições para poder se trocar limite com integral são **bem** mais simples na integral de Lebesgue do que na de Riemann. Na integral de Lebesgue (veja teoremas abaixo) basta se ter convergência pontual (qtp) e uma condição extra simples (monotonicidade ou dominância por uma função integrável). Por contraste, a integral de Riemann pede, por exemplo, convergência uniforme.

Para se entender a essência destes resultados, recomendo estudar o enunciado e resolver o Exercício 1.55, p.19.

TEOREMA 2.17 (convergência monótona) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais não-negativas integráveis em X tais que*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \mu\text{-qtp. em } X \text{ (convergência pontual).}$$

Suponha que a sequência é monótona crescente, isto é,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \mu\text{-qtp. em } X, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (monotonicidade).}$$

Se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu < \infty$, então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Prova: Ver [1] p.31, Theorem 4.6. ■

Exemplo 2.5 *Seja a_n uma enumeração de $\mathbb{Q}$ e $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{ a_k \}$. Seja $f_n = I_{A_n}$. Claramente f_n é uma sequência monótona crescente que converge para $I_{\mathbb{Q}}$. Como $\int f_n \, d\mu = 0$ para todo n ($f_n = 0$ exceto em número finito de pontos) $\int I_{\mathbb{Q}} \, d\mu = 0$. Contraste com a integral de Riemann, onde $\int_{\mathbb{R}} I_{\mathbb{Q}}(x) \, dx$ não existe pois o conjunto dos pontos de descontinuidade desta função não possui medida zero (é $\mathbb{R}$).*

TEOREMA 2.18 (convergência dominada de Lebesgue) *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais integráveis em X tais que*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \mu\text{-qtp. em } X \text{ (convergência pontual).}$$

Suponha que exista uma função integrável g tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \ \mu\text{-qtp. em } X, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (dominância por função integrável).}$$

Então f é integrável e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Prova: Ver [1] p.44, Theorem 5.6. ■

DEFINIÇÃO 2.19 *Dizemos que uma sequência de funções mensuráveis f_n* **converge em medida** *para f se $\lim_{n \to \infty} \mu(|f_n - f| \geq a) = 0$ para todo $a > 0$.*

2.4 Integral de Riemann × Lebesgue

Primeiro vamos ver algumas dificuldades com a integral de Riemann:

- Troca do limite com a integral. No estudo da série de Fourier existe a necessidade de trocar o processo de limite com a integração. No entanto, as condições que permitem mostrar que

$$\lim_{k \to \infty} \left[\int f_k(x) \, dx \right] = \int \left[\lim_{k \to \infty} f_k(x) \right] \, dx$$

são difíceis na integral de Riemann.

- A ausência da convergência monótona. O exemplo canônico é considerar a_k a enumeração dos racionais em $[0,1]$ e definir

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = a_j,\ j \leq k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As funções g_k são iguais a zero em todos os pontos exceto num conjunto finito pontos, e portanto sua integral de Riemann é zero. A sequência g_k, claramente não-negativa, converge monotonamente para a função $I_{\mathbb{Q}}$, que não é integrável a Riemann.

- Inapropriada para intervalos ilimitados. A integral de Riemann é apropriada somente para intervalos limitados. Pode ser estendida para intervalos ilimitados tomando limites contanto que não surja $\infty - \infty$.

- Definição está muito atrelada ao $\mathbb{R}^n$. Como se generalizar a integral para outros espaços?

Para fazermos uma comparação informal entre as duas integrais, imagine que desejamos saber o volume de uma montanha (acima do nível do mar) sabendo a função de sua altura h.

- na **integral de Riemann** dividimos a montanha numa malha de 1 metro quadrado e medimos a altura h da montanha no centro de cada quadrado. O volume em cada quadrado da malha é aproximadamente $1 \times 1 \times h$. Portanto o volume total é (aproximadamente) igual a soma deste volumes. Neste caso estamos particionando o **domínio**.

- na **integral de Lebesgue** desenhamos um mapa de contorno da montanha (curvas de nível) com 1 metro de altura entre elas. O volume contido entre duas curvas de nível é aproximadamente igual a área entre as curvas vezes a altura h da curva de nível. Portanto o volume total é (aproximadamente) igual a soma deste volumes. Neste caso estamos particionando a **imagem**.

Vamos agora (re)ver a definição da integral de Riemann numa forma apropriada para fazer uma comparação técnica com a integral de Lebesgue, respondendo as perguntas mais interessantes.

Começamos definindo a integral de uma função escada (compare com a definição de função simples). Aqui surge novamente a dificuldade: como a representação de uma função escada não é única, temos (mas vamos ignorar) que provar que a integral de Riemann está bem definida (independe da representação).

DEFINIÇÃO 2.20 (integral de Riemann de função escada) *Uma função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de* **função escada** *se $s = \sum_{i=0}^{n} c_i I_{E_i}$, onde cada E_i é um intervalo limitado e $c_i \in \mathbb{R}$. Sejam a_i e b_i os extremos do intervalo E_j. Definimos a* **integral de Riemann** *de s por*

$$\mathcal{R}\!\!\!\int s(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i(b_i - a_i).$$

É fácil ver que cada partição do intervalo $[a,b]$ induz a duas funções escadas: uma que assume o $\sup$ da função em cada intervalo, e outra que assume o $\inf$ da função em cada intervalo.

DEFINIÇÃO 2.21 (integral superior/inferior de Riemann) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, definimos sua* **integral superior de Riemann** *por*

$$U_{[a,b]}(f) = \inf \left\{ \int s(x)\,dx \mid \text{ } s \text{ é função escada e } f \leq s \right\},$$

e sua **integral inferior de Riemann** *por*

$$L_{[a,b]}(f) = \sup \left\{ \int s(x)\,dx \mid \text{ } s \text{ é função escada e } s \leq f \right\}.$$

DEFINIÇÃO 2.22 (Integral de Riemann de função qualquer) *Dizemos que f é* **integrável a Riemann** *em $[a,b]$ se*

$$U_{[a,b]}(f) = L_{[a,b]}(f).$$

Neste caso definimos o valor comum como sendo a **integral de Riemann** *de f no intervalo $[a,b]$, denotada por $R\!\!\!\int_a^b f(x)\,dx$.*

Voltando e comparando a Definição 2.10, p.29 (integral de Lebesgue) com a definição da integral de Riemann, observamos que a principal diferença consiste no uso de funções escada ao invés de funções simples. Para comparar funções simples com escada veja Exercício 2.45, p.43.

Apresentamos agora um resultado clássico (ver algum livro de análise para demonstração) sobre a integral de Riemann, relacionando-a com a medida de Lebesgue.

TEOREMA 2.23 (Lebesgue) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável a Riemann em $[a,b]$ se, e somente se, o conjunto $D = \{x \in [a,b]\ ;\ f \text{ é descontínua em } x\}$ tem medida nula com relação a medida de Lebesgue.*

TEOREMA 2.24 (Riemann $\times$ Lebesgue) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável a Riemann, então f é integrável a Lebesgue, com a mesma integral.*

Prova: Nós vamos provar apenas para $f \geq 0$. Para o caso geral decomponha $f = f^+ - f^-$.

Como o $\sup$ para integral de Lebesgue é tomado num conjunto maior (o conjunto das funções simples, que contém o conjunto das funções escada, veja Exercício 2.45, p.43) que a da integral inferior de Riemann (o conjunto das funções escada),

$$R\!\!\!\int_a^b f(x)\,dx = L_{[a,b]}(f) \leq \int f\,d\mu.$$

Pela monotonicidade da integral de Lebesgue, dada uma função escada s qualquer (que é mensurável pois é simples) tal que $f \leq s$,

$$\int f\,d\mu \leq \int s\,d\mu.$$

Tomando o $\inf$ nos dois lados com relação as funções escada s's tais que $f \leq s$,

$$\int f\,d\mu \leq L_{[a,b]}(f) = R\!\!\!\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dessas desigualdades concluímos que

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx \leq \int f\,d\mu \leq \mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Portanto, $\mathcal{R}\int_a^b f(x)\,dx = \int f\,d\mu$. ■

Este teorema é sobre a integral própria de Riemann, de uma função limitada em um intervalo limitado. Para funções ilimitadas e intervalos ilimitados define-se a integral tomando limites. Por exemplo a integral imprópria de Riemann $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ é finita mas $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$. Se fosse Lebesgue integrável ambas seriam finitas (ou infinitas). Ver Exercício 2.47, p.43.

Nesse sentido, a integral de Lebesgue é uma integral "absolutamente convergente", significando que f é integrável a Lebesgue se, e somente se, $|f|$ também é. Na função $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, obteríamos que tanto a integral de f^+ quanto a de f^- é ∞, obtendo que a integral de Lebesgue seria igual a $\infty - \infty$, algo não definido.

Em contraste, a integral de Riemann em intervalos ilimitados é "condicionalmente convergente" Da teoria de séries sabemos que os termos de uma série condicionalmente convergentes não podem ser comutados nem associados de forma arbitrária preservando o valor da série. Assim esta restrição ("convergência absoluta") da integral de Lebesgue assegura mais robustez nas suas propriedades.

2.5 Teorema de Radon-Nikodým

O Teorema de Radon-Nikodým define a "derivada" de uma medida com relação a outra. Para apresentá-lo precisamos de algumas definições.

DEFINIÇÃO 2.25 *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma medida μ é* **finita** *se ela não assume o valor ∞. Dizemos que ela é σ-***finita** *se existe uma sequência E_n em Σ com:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X \quad \text{e} \quad \mu(E_n) < \infty.$$

DEFINIÇÃO 2.26 *Dadas medidas λ e μ em definidas numa σ-álgebra Σ, dizemos que λ é* **absolutamente contínua** *com relação a μ, denotado por $\lambda \ll \mu$, se para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$.*

Para se entender a notação $\lambda \ll \mu$, observe que se $\mu(E) = 0$, então $0 \leq \lambda(E) \ll \mu(E) = 0$. Logo $\lambda(E) = 0$.

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável não-negativa. Para cada $E \in \Sigma$ defina $\lambda(E) \in [0, \infty]$ por:

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu.$$

Pelo Exercício 2.53, p.44 λ é uma medida absolutamente contínua com relação a μ. Note que como λ é uma medida,

$$\lambda(E) = \int_E d\lambda = \int_E f\,d\mu \quad \text{para todo} \quad E \in \Sigma.$$

Logo, abusando notação,

$$\int_E (d\lambda - f\,d\mu) = 0 \quad \text{para todo} \quad E \in \Sigma.$$

Portanto, em algum sentido, $d\lambda = f\,d\mu$, ou seja, $f = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$, a chamada **derivada de Radon-Nikodým**. O próximo teorema mostra que toda medida σ-finita absolutamente contínua é obtida desta forma.

TEOREMA 2.27 (Radon-Nikodým) *Sejam λ e μ medidas σ-finitas definidas numa σ-álgebra Σ de subconjuntos de X e suponha que $\lambda \ll \mu$, isto é, λ é absolutamente contínua com relação a μ. Então existe uma função não-negativa $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável (com relação a Σ) tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu \quad \textit{para todo} \quad E \in \Sigma.$$

Além disso, f é única no sentido que se g possui esta propriedade, $g = f$ μ-qtp em X.

Prova: Ver [1] p.85, Theorem 8.9. ■

Observação 2.12 *Chamamos a função f de* **derivada de Radon-Nikodým** *de λ com relação a μ, denotada por $f = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$.*

Este é um teorema de representação no seguinte sentido. Considere $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas σ-finitas em (X, Σ) dominadas por μ e $\mathcal{F}$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}$ não-negativas Σ-mensuráveis. O Teorema de Radon-Nikodým define uma função $\Psi : \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ definida por $\Psi(\lambda) = f$. Esta função é sobrejetiva pelo Exercício 2.53, p.44.

Em Teoria da Probabilidade, o Teorema de Radon-Nikodým é fundamental para se definir a probabilidade condicional em espaços de medida infinitos. A dificuldade, contornada pelo Teorema de Radon-Nikodým, é que se tentarmos generalizar a definição usual de probabilidade condicional surgirá uma divisão de zero por zero.

2.6 Teorema de Decomposição de Medidas

O Teorema de decomposição de medidas de Lebesgue ajuda a entender a dicotomia que existe entre espaços discretos e contínuos. O fio condutor é a decomposição de uma medida qualquer em:

(a) parte contínua, tipo Lebesgue-Stieltjes, que atribui medida zero aos pontos, análogo a calcular massa de um sólido pela função densidade;

(b) parte discreta, tipo Delta de Dirac, que atribui massa positiva a pontos, análogo a calcular massa de um sólido como soma de massas de cada átomo.

DEFINIÇÃO 2.28 *Dadas medidas λ e μ em definidas numa σ-álgebra Σ de X, dizemos que μ e λ são* **singulares***, denotado por $\lambda \perp \mu$, se existem $A, B \in \Sigma$ tais que $A \cup B = X$ e $\mu(E) = \lambda(F) = 0$ para todo $E, F \in \Sigma$ e $E \subset A$, $F \subset B$.*

Exemplo 2.6 *O exemplo básico de medidas singulares entre si são a de Lebesgue e a delta de Dirac. Qualquer combinação linear de delta de Dirac também será singular a medida de Lebesgue.*

Exemplo 2.7 *Medida de Lebesgue-Stieltjes gerada por função suave (absolutamente contínua é suficiente, basta poder aplicar TFC) é singular com relação a medida delta de Dirac.*

Exemplo 2.8 *Considere a medida definida em $\mathbb{R}^2$ por $\mu(A)$ é a comprimento de arco de $A \cap S^1$ (interseção com círculo de raio 1). Assim a medida está concentrada no círculo. Ela é singular com relação a de Lebesgue no plano. Pode ser gerada por Lebesgue-Stieltjes pela função de duas variáveis $F(x, y)$ zero no interior do círculo, 1 fora do círculo.*

Exemplo 2.9 *Exemplo bem mais difícil é medida de Lebesgue-Stieltjes gerada pela função de Cantor, que é contínua mas não é absolutamente contínua. Ela está concentrada no conjunto de Cantor, que é não-enumerável, como se fosse a soma não-enumerável de deltas de Dirac. Ela é singular com relação a medida de Lebesgue (basta considerar o conjunto de cantor como A e B seu complementar). Veja na Wikipedia detalhes.*

TEOREMA 2.29 (Decomposição de Medidas de Lebesgue) *Dadas medidas (ou cargas) σ-finitas μ e ν num espaço de medida (X, Σ), existem duas medidas σ-finitas ν_0 e ν_1 tais que:*
(a) $\nu = \nu_0 + \nu_1$.
(b) $\nu_0 \ll \mu$ (ν_0 é absolutamente contínua com relação a μ).
(c) $\nu_1 \perp \mu$.
A decomposição é única.

Prova: Ver [1] p.88, Theorem 8.11. ∎

Observação 2.13 *Existe uma analogia, inclusive com a notação, de soma direta de espaços vetoriais. Considere $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas σ-finitas em (X, Σ) (se fosse carga seria um espaço vetorial). Fixada uma "direção" $\mu \in \mathcal{M}$, todo elemento $\nu \in \mathcal{M}$ pode ser escrito como uma soma de um elemento ν_0 na "mesma direção" que μ ($\nu_0 \ll \mu$) mais um elemento ν_1 no "complemento ortogonal" ($\nu_1 \perp \mu$). Assim, $\mathcal{M} = \langle\mu\rangle \oplus \langle\mu\rangle^\perp$. A unicidade justifica o "soma direta".*

Pelo Exercício 1.94, p.23 podemos representar toda medida de probabilidade nos borelianos da reta por uma função g, função cumulativa de distribuição (cdf) da medida. Se g for continuamente diferenciável, pelo Teorema de Radon-Nikodýn, a medida é $f\,ds$, com $g' = f$.

Observação 2.14 *Mesmo se g for somente absolutamente contínua pode-se representá-la pois g é absolutamente contínua se, e somente se, g possui derivada g' em quase todo ponto, a derivada é integrável à Lebesgue e $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,dt$.*

Se g for continuamente diferenciável por partes, como g é crescente, pode-se decompor (ver Exercício 2.63, p.45) $g = g_1 + g_2$ com g_1 absolutamente contínua e crescente e g_2 função constante por partes (descontinuidades do tipo pulos). Basicamente concluímos que toda medida nos borelianos da reta é a combinação de:

(a) uma medida "contínua" $f\,ds$, f a densidade contínua e ds medida de Lebesgue, onde pontos possuem medida zero;

(b) uma medida singular, tipo soma de deltas de Dirac, onde pontos tem medida positiva.

Particularizando para medida finita nos borelianos do $\mathbb{R}^n$ sabemos mais.

TEOREMA 2.30 (decomposição de medida finita nos borelianos) *Todo medida ν finita definida nos borelianos do $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposta por $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ com:*
(a) ν_1 absolutamente contínua com relação a Lebesgue;
(b) ν_2 parte singular contínua (tipo Cantor ou delta no círculo);
(c) ν_3 medida discreta (puramente pontual, combinação discreta de delta de Dirac).

Prova: Ver [9]. ∎

2.7 Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini permite calcular uma integral dupla como duas integrais simples sucessivas, trocando a ordem de integração. Mas precisamos começar construindo medida em espaços obtidos por produto cartesiano.

Em Matemática é comum termos um estrutura matemática (topologia, grupo, espaço com medida, etc.) definida separadamente em conjuntos A e B e, partindo destas estruturas construir (estendendo de forma natural) uma estrutura em $A \times B$, o espaço-produto. No caso da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$, a medida de subconjuntos será feita utilizando retângulos, cuja área será o produto da medida dos lados. A construção abaixo generaliza esta ideia.

TEOREMA 2.31 (medida produto) *Sejam (X, Σ, μ) e (Y, T, τ) espaços de medida σ-finitos. Existe uma única medida π, a chamada* **medida produto***, definida em $\sigma(\Sigma \times \mathsf{T})$ (σ-álgebra produto) tal que $\pi(A \times B) = \mu(A)\tau(B)$ para todo $A \in \Sigma$ e $B \in \mathsf{T}$. Denotamos $\pi = \mu \times \tau$.*

Prova: Para construção da σ-álgebra produto ver Definição 1.8, p.4. Para prova ver [1] p.114, Theorem 10.4. ∎

Observação 2.15 *Por indução podemos definir uma medida em produtos cartesianos finitos. Uma questão bem mais delicada (ver Seção 3.4, p.49) é construir uma medida num produto cartesiano infinito como $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$.*

O Teorema de Fubini permite calcular a integral no espaço produto por iteração, como duas integrais sucessivas em cada um dos espaços. Note que o resultado independe da ordem de integração em cada um destes espaços.

TEOREMA 2.32 (Fubini) *Sejam (X, Σ, μ) e (Y, T, ν) espaços de medidas completos, $\pi = \mu \times \nu$ a medida produto e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função π-integrável. Então,*

$$\int_{X \times Y} f \, d\pi = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Prova: Ver [1] p.119, Theorem 10.10. ∎

2.8 Outras Construções da Integral

Um outro caminho para se construir uma Teoria de Integração é utilizando métodos da Análise Funcional. Fazemos o caminho inverso ao percorrido até aqui: ao invés de desenvolver uma teoria de medida para construir a integral, construímos uma integral para depois introduzir uma medida.

Considere o espaço das funções contínuas de suporte compacto, denotado por $C^c(\mathbb{R})$. Neste espaço podemos definir a integral de Riemann (que não necessita de teoria da medida). Introduzindo a norma $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ (integral de Riemann!) em $C^c(\mathbb{R})$, obtemos um EVN (espaço vetorial normado) que não é completo (tal qual $\mathbb{Q}$) mas que pode ser completado para obtermos $L^1(\mathbb{R})$, um espaço de Banach, com técnica semelhante a utilizada para se completar $\mathbb{Q}$ e obter $\mathbb{R}$ (classes de equivalência de sequências de Cauchy).

O espaço $L^1(\mathbb{R})$ é isomorfo ao espaço das funções integráveis a Lebesgue identificando funções que diferem num conjunto de medida nula. A integral de Riemann, que está definida no subespaço (denso) $C^c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, pode ser estendida por continuidade, de forma única, para todo o espaço (analogia com como a definição de 2^x para $x \in \mathbb{R}$ partindo da definição de 2^x para $x \in \mathbb{Q}$).

Esta integral estendida de $C^c(\mathbb{R})$ para todo o $L^1(\mathbb{R})$ é igual a **integral de Lebesgue**.

2.9 Exercícios do Capítulo 2. Integração

2.9.1 Função Mensurável

2.1. Seja Σ uma σ-álgebra em X e $f : X \to \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:
(a) $\{f < a\} \in \Sigma$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(b) $\{f \le b\} \in \Sigma$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
(c) $\{f < q\} \in \Sigma$ para todo $q \in \mathbb{Q}$.
Dica: Para provar que (a)⇒(b), considere $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \mid \; f(x) < a + 2^{-n}\}$.

2.2. (funções mensuráveis triviais) Considere $f : X \to \mathbb{R}$. Quais são as funções f Σ-mensuráveis:
(a) se $\Sigma = \mathrm{P}(X)$? (b) se $\Sigma = \{\emptyset, X\}$? (c) com relação a qualquer σ-álgebra?

2.3. Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas funções distintas $f : X \to X$ são Σ-mensuráveis se:
(a) $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}$. (b) $\Sigma = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$.

2.4. Prove que são equivalentes (I é a função indicadora):
(a) $I_A : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável. (b) $A \in \Sigma$. (c) $I_{A^c} : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável.

2.5. Determine a menor σ-álgebra em X que torna mensurável uma função $f : X \to \mathbb{R}$ que assuma somente: (a) 2 valores distintos; (b) 3 valores distintos.

2.6. Sejam $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis com relação a σ-álgebra de Borel. Prove que $X = \phi \circ Y$ é mensurável com relação a σ-álgebra de Borel.

2.7. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções Σ-mensuráveis. Prove que são Σ-mensuráveis: (a) $\max(f, g)$. (b) $f^+ = \max(f, 0)$. (c) $|f|$. (d) f^2.

2.8. Considere $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} \mid \; A$ é enumerável ou $A^{\complement}$ é enumerável$\}$, uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ pelo Exercício 1.9, p.14. Determine se é Σ-mensurável: (a) $I_{[0,1]}$; (b) $I_{\mathbb{Q}^{\complement}}$.

2.9. Prove que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável se:
(a) f é monótona; (b) f é contínua.
Dica: (b) Toda subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos (Exercício 1.18, p.15) .

2.10. Prove que toda função Borel-mensurável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável.
Dica: Existe diferença?

2.11. Prove que se $f : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável e $H \in \Sigma$, então a função $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in H, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus H, \end{cases}$ é Σ-mensurável.

2.12. Suponha que $f = I_A + 2I_B$ e $g = cI_C + dI_D$ (com $C \neq D$) são Σ-mensuráveis.
(a) Prove que $A, B \in \Sigma$. (b) Que condições garantem $C, D \in \Sigma$?
Dica: $g(X) \subset \{0, c, d, c+d\}$, mas este conjunto pode ter menos de 4 elementos.

2.13. (σ-álgebra produto é natural) Fixe σ-álgebras em X e Y. Considere as projeções naturais $\pi_X : X \times Y \to X$ definida por $\pi_X(x, y) = x$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ definida por $\pi_Y(x, y) = y$. Prove que a σ-álgebra produto em $X \times Y$ é a menor σ-álgebra tal que π_X e π_Y são mensuráveis.

2.14. Seja $f \geq 0$ mensurável, com $f : X \to \mathbb{R}$. Prove que existe uma sequência monótona crescente $g_n \geq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ com g_n uma função simples. Mais ainda, se X tem medida finita, $\int_X |f - g_n| d\mu \leq 2^{-n}\mu(X)$.
Dica: Defina $E_{kn} = \{x \in X; \quad k2^{-n} \leq f(x) \leq (k+1)2^{-n}\}$. Para $k = 2^n$, $E_{kn} = \{f \geq n\}$.

2.15. (basta ver geradores) Fixe Σ_X e Σ_Y σ-álgebras em X e Y respectivamente. Suponha que $\mathcal{A}$ gera Σ_Y. Prove que $\phi : X \to Y$ é mensurável se, e somente se, $\phi^{-1}(E) \in \Sigma_X$ para todo $E \in \mathcal{A}$.

2.16. Para que **toda** função $f : X \to Y$ seja mensurável, qual deve ser a σ-álgebra em:
(a) X (independentemente da σ-álgebra em Y)?
(b) Y (independentemente da σ-álgebra em X)?

2.17. Fixe a função $f : X \to Y$, Σ_X e Σ_Y σ-álgebras em X e Y respectivamente. Prove que:
(a) $\Sigma_{f,Y}$ (Definição 1.10, p.4) é a **maior** σ-álgebra em Y que torna f mensurável.
(b) $\Sigma_{f,X}$ (Definição 1.10, p.4) é a **menor** σ-álgebra em X que torna f mensurável.

2.9.2 Definição da Integral

2.18. Prove que a representação de uma função simples não-nula f por $\sum_{i=0}^{n} a_i I_{E_i}$ é única se os a_i's são não-nulos e únicos e se os E_i's são disjuntos.
Dica: f pode assumir somente um número finito de valores (porque?). Defina $E_i = f^{-1}(b_i)$, onde b_i é cada um destes valores.

2.19. (proibido usar integral, provar por primeiros princípios) Sejam A, B, C, D conjuntos mensuráveis com medida finita e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
(a) Suponha que $aI_A = bI_B + cI_C$. Prove que $a\mu(A) = b\mu(B) + c\mu(C)$
(b) Suponha que $aI_A + bI_B = cI_C + dI_d$. Prove que $a\mu(A) + b\mu(B) = c\mu(C) + d\mu(D)$.
Dica: cuidado pois os números podem não ser distintos e os conjuntos podem não ser disjuntos.

2.20. (bem mais difícil do que parece! Proibido usar integral, provar por primeiros princípios.) Seja (X, Σ, μ) e $E_i \in \Sigma$. Se $f = \sum_{i=1}^{N} a_i I_{E_i}$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in X$, então $\sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E_i) = \mu(X)$.

2.21. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Prove que:
(a) Toda função constante é simples. (b) Toda função simples é mensurável.

2.22. Considere $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Prove que são funções simples:
(a) $|f|$. (b) $\max(f, g)$. (c) f^2. (d) $cf + g$ (espaço de funções simples é espaço vetorial).

2.23. Prove que $\displaystyle\int f\,d\mu < \infty$ se, e somente se, $\displaystyle\int |f|\,d\mu < \infty$.

2.24. Considere o Teorema 2.14, p.30. Prove (a) e (b). Use (b) para provar (c).

2.25. Em um espaço vetorial normado, se $\|f\| = 0$ então $f = 0$. Dissemos que $L^1(X)$ é um espaço vetorial normado. No entanto, pelo Teorema 2.14, p.30, se $\|f\| = 0$, então $f = 0$ μ-qtp, ou seja, não necessariamente $f = 0$. Explique.

Dica: Leia a p. 18.

2.26. (desigualdade de Markov) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Prove que para todo $\varepsilon > 0$, $\quad \varepsilon\,\mu(f \geq \varepsilon) \leq \int_X |f|\,d\mu$.

2.27. (Lema de du Bois-Reymond[2]) Considere $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável em (X, Σ, μ). Prove que $f = 0$ μ-qtp em X se:

(a) $\displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$ para todo $E \in \Sigma$; (b) $\displaystyle\int fg\,d\mu = 0$ para toda g Σ-mensurável.

Obs: resultado importante para o cálculo das variações.

Dica (para todos itens): suponha por contradição que o conjunto $\{x \in X \mid \ f(x) > \varepsilon\}$ (ou $\{x \in X \mid \ f(x) < \varepsilon\}$) não possui medida nula. Use este conjunto ou sua função característica.

2.28. Suponha que (X, Σ, μ) é σ-finito e $g \in L^\infty(X)$. Prove que se $\int fg d\mu = 0$ para toda $f \in L^1(X)$, então $\|g\|_\infty = 0$. Compare com exercício anterior.

Dica: Decomponha X e faça em cada componente.

2.29. Prove que a função:

(a) $1/x \notin L^1(1, \infty)$ mas pertence a $L^p(1, \infty)$.

(b) $1/x \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

(c) $f(x) = \frac{I_{\mathbb{Z}}(x)}{x}$ pertence a $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.30. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função simples $g_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int |f - g_\varepsilon|\,d\mu < \varepsilon$. Dizemos que as funções **simples são densas no espaço das funções integráveis** $L^1(X, \Sigma, \mu)$.

Dica: Considere $f \geq 0$ inicialmente e veja Exercício 2.14, p.40.

2.31. Seja μ a medida de contagem (Exemplo 1.12, p.6) em $\mathbb{N}$. Prove que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (uma sequência $\langle f(n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$) é μ-integrável se, e somente se, a série $\sum f(n)$ é absolutamente convergente e nesse caso

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

2.32. Sejam μ_1, μ_2 duas medidas com domínio na σ-álgebra Σ. Defina $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$ para $E \in \Sigma$. Prove que para qualquer função Σ-mensurável $f : X \to \mathbb{R}$,

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_1 + \int f\,d\mu_2.$$

Dica: Assuma que f é função simples e depois que $f \geq 0$.

2.33. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$.

[2]Paul David Gustav du Bois-Reymond: 1831, Berlim, Alemanha – 1889, Freiburg, Alemanha.

(a) Se f é Σ-mensurável e $E_n = \{n-1 \leq |f| < n\}$, prove que $f \in L^1(X)$ se, e somente se, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mu(E_n) < \infty$.

(b) Prove que $L^p(X) \subset L^r(X)$ para todo $r \in [1,p]$.

Dica: Aplique Hölder em $|f|^r \in L_{p/r}$ e $q=1$ e obtenha $\|f\|_r \leq \|f\|_p(\mu(X))^s$, $s = 1/r - 1/p$.

(c) Prove que $L^\infty(X) \subset L^r(X)$ para todo $r \geq 1$ e que se $f \in L^\infty$, então $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p}$.

2.34. Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida. Prove que $L^\infty(X) \subset L^1(X)$ se, e somente se, $\mu(X) < \infty$.

2.35. Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida. Prove que se $f \in L^1(X)$, então:

(a) $\lim_{n\to\infty} \mu(|f| > n) = 0$. Dica: $H_n = \{|f| > n\}, nI_{H_n} \leq f$.

(b) $\mu(|f| = \infty) = 0$.

(c) existe $A_f \subset X$ tal que $X \setminus A_f$ é σ-finito e $f = 0$ em A_f.

2.36. (interpolação de espaços funcionais) Se $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$, então $f \in L^p$ para todo $p \in [p_1, p_2]$. Dica: desigualdade de Hölder.

2.37. (introdução ao **dual topológico**) Vamos provar que dado $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, o dual topológico do L^q é o L^p. Mais precisamente dada uma função $f \in L^p$, definimos o **funcional linear** (que depende de f) $T_f : L^q \to \mathbb{R}$ por $T_f(g) = \int fg\,d\mu$. Este funcional é contínuo na norma L^q, $\|f\|_{L^p} = \|T_f\|_{L(L^q;\mathbb{R})}$ e obtemos uma **isometria** entre o espaço dos funcionais lineares contínuos $L(L^q;\mathbb{R})$ e L^p, ou seja, o dual topológico do L^q é o (pode ser identificado isometricamente) L^p.

Prove que:

(a) T_f é linear.

(b) $|T_f(g)| = |\int fg\,d\mu| \leq \|f\|_{L_p}$ para $\|g\|_{L^q} \leq 1$. Assim T_f é contínuo. Dica: Hölder.

(c) Se $f \neq 0$, defina $g_0 = C|f|^{p-1}\text{sinal}(f)$, onde $C = (\|f\|_{L^p})^{-p/q}$. Mostre que $g_0 \in L^q$, $\|g_0\|_{L^q} = 1$ e $\int fg_0\,d\mu = \|f\|_{L^p}$.

(d) $\|f\|_{L^p} = \sup_g T_f(g)$ para $\|g\|_{L^q} \leq 1$. Assim $\|f\|_{L^p} = \|T_f\|_{L(L^q;\mathbb{R})}$.

2.38. Seja dx a medida de Lebesgue. Prove que se $f : X \to \mathbb{R}$ é integrável, então $\int f(x+a)\,dx$ existe e é igual a $\int f(x)\,dx$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Dica: Comece com funções simples. Assuma que a medida de Lebesgue é invariante por translação.

2.9.3 Teoremas de Convergência

2.39. (para aprender todos tipos de convergência) Com relação à medida de Lebesgue na reta, determine, para cada uma das sequências abaixo:

i. Para onde converge pontualmente.

ii. Se converge uniformemente.

iii. Se converge na norma L^1.

iv. Se converge em medida.

v. Se o teorema da convergência monótona se aplica.

vi. Se o teorema da convergência dominada de Lebesgue se aplica.

(a) $f_n = I_{[0,\ n]}$. (b) $f_n = \frac{1}{n} I_{[0,\ n]}$. (c) $f_n = \frac{1}{n} I_{[n,\ \infty)}$.
(d) $f_n = I_{[n,\ n+1]}$. (e) $f_n = nI_{[1/n,\ 2/n]}$. (f) $f_n = nI_{[0,\ 1/n]}$.
(g) $f_n = I_{A_n}$ onde $A_1 = [0,\ 1]$, $A_2 = [0,\ 1/2]$, $A_3 = [1/2,\ 1]$, $A_4 = [0,\ 1/3]$, $A_5 = [1/3,\ 2/3]$, $A_6 = [2/3,\ 1]$, $A_7 = [0,\ 1/4]$, $A_8 = [1/4,\ 2/4]$, $A_9 = [1/4,\ 2/4]$, $A_{10} = [2/4,\ 3/4]$, $A_{11} = [3/4,\ 1]$,...

2.40. Se $\mu(X) < \infty$ e $r(f) = \displaystyle\int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu$ e f_n é mensurável, prove que $f_n \to f$ em medida se, e somente se, $r(f_n - f) \to 0$.

2.41. Suponha que $\mu(X) < \infty$, $E_{n+1} \subset E_n$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$. Prove que $I_{E_n} \to 0$ em L^p

2.42. Suponha que $X = \bigcup_n X_n$ e $f \in L^p(X)$. Prove que $f\, I_{X_n} \to f$ em L^p.

2.43. Considere a sequência de funções reais $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, todas integráveis e tais que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu$ é finito. Prove que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ está definida qtp. e $\displaystyle\int f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n\, d\mu$.

Dica: Assuma inicialmente que $f_n \geq 0$.

2.44. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer, defina para cada $k \in \mathbb{R}$ a função $T_k f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o **truncamento de** f por

$$T_k f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq k; \\ k, & \text{se } f(x) > k; \\ -k, & \text{se } f(x) < -k. \end{cases}$$

Suponha que f é μ-integrável. Prove que:

(a) $T_k f$ é mensurável; (b) $\int f\, d\mu = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \int T_k f\, d\mu$.

2.9.4 Integral de Riemann $\times$ Lebesgue

2.45. Prove que toda função escada é uma função simples (em particular mensurável). Prove que $f = I_{\mathbb{Q}}$ é uma função simples que não é uma função escada. Assim o conjunto de funções simples é (bem) maior que o de funções escada.

2.46. Fixe uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dada uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$, determine a função escada s associada que seja a menor de todas com $f \leq s$. Assim s deve ser constante entre os pontos da partição.

2.47. Prove que a integral de Riemann:
(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx < \infty$. (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$.
Dica: (a) integre por partes. (b) série harmônica.

2.9.5 Teorema de Radon-Nikodým e Fubini

2.48. Prove que a relação **ser dominada** é transitiva. Dê um exemplo que não seja simétrica.

2.49.
(a) Dê um exemplo de medida σ-finita que não é finita.
(b) A medida de contagem (Exemplo 1.12, p.6) é finita? É σ-finita?
(c) A medida δ_a de Dirac é finita? É σ-finita?

2.50. (decomposição ortogonal) Prove que se $\lambda \ll \mu$ e $\lambda \perp \mu$, então $\lambda = 0$.

2.51. Considere λ e μ são medidas σ-finitas. Defina $v = \lambda + \mu$. Prove que:
(a) v é σ-finita. (b) $\lambda \ll v$ e $\mu \ll v$.

2.52. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $A \in \Sigma$. Defina $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$ para $E \in \Sigma$. Prove que (ver generalização no Exercício 2.58, p.45):
(a) λ é uma medida. (b) $\lambda \ll \mu$ (é absolutamente contínua). (c) $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = I_A$.

2.53. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável não-negativa. Para cada $E \in \Sigma$ defina $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$. Prove que:
(a) λ é uma medida em Σ. Dica: Use o Teorema da convergência monótona.
(b) $\lambda \ll \mu$ (é absolutamente contínua). (c) λ é finita se, e somente se, f é integrável.
(d) $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = f$. (e) este exercício generaliza o anterior.

2.54. Supondo que $f \in L^1$ no exercício anterior prove que:
(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) < \delta$ implica que $\lambda(E) < \varepsilon$.
Dica: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{|f|>n} f\, d\mu = 0$.
(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon \in \Sigma$ com $\mu(E_\varepsilon) < \infty$ e $\int f\, d\mu \leq \varepsilon + \int_{E_\varepsilon} f\, d\mu$.
Dica: $E_\varepsilon = \{|f| > n\}$ para algum $n(\varepsilon)$.
(c) Suponha que $f_n \in L^p$ e $f_n \to f$ em L^p. Prove que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$ tal que para todo $E \in \Sigma$ com $\mu(E) < \delta$ implica que $\int_E |f_n|^p\, d\mu < \varepsilon$.
Dica: $\|f_n\| \leq \|f_n - f\| + \|f\|$.

2.55. (regra da cadeia para medidas) Considere λ, μ, ν medidas σ-finitas com $\nu \ll \lambda \ll \mu$. Prove que $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{d\nu}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\mu}$.

2.56. (derivada da inversa para medidas) Considere λ, μ medidas σ-finitas com $\lambda \ll \mu$ e $\mu \ll \lambda$. Prove que $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \dfrac{1}{d\mu/d\lambda}$.

2.57. Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas em (Σ, X) com $\mu_n(X) \leq 1$. Defina $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ por

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu_n(E).$$

(a) Prove que λ é uma medida e que $\mu_n \ll \lambda$ para todo n.
(b) Determine $\dfrac{d\mu_n}{d\lambda}$.

2.58. (introdução a esperança condicional) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Considere a sequência $E_n \in \Sigma$ disjunta. Dado $A \in \Sigma$ defina $\lambda(A) = \sum_n \mu(A \cap E_n)$. Prove que

(a) λ é uma medida. (b) $\lambda \ll \mu$ (é absolutamente contínua). (c) $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \sum_n I_{E_n}$

2.59. (esperança condicional) Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $\Gamma \subset \Sigma$ um σ-álgebra. Uma aplicação importante do Teorema de Radon-Nikodýn é a existência da esperança condicional. Dada uma função Y Σ-mensurável (variável aleatória na linguagem de probabilidade) a esperança condicional de Y com relação a σ-álgebra Γ é denotada por $W = E(Y|\Gamma)$ é caracterizada por:

(a) W é Γ-mensurável.

(b) $\int_E W\, d\mu = \int_E Y\, d\mu$ para todo $E \in \Gamma$.

Defina $\lambda(E) = \int_E Y\, d\mu$ para todo $E \in \Gamma$ e aplique Radon-Nikodýn. Pode-se entender melhor este resultado pensando em funções Y que são simples. Além disso pode-se ver este resultado como a projeção "ortogonal" de Y no espaço das funções Γ-mensuráveis. Veja Wikipedia para detalhes ou Chung.

2.60. Seja $X = [0, 1]$ e Σ a σ-álgebra de Borel em X. Se μ é a medida de contagem (Exemplo 1.12, p.6) e λ a medida de Lebesgue, então $\lambda \ll \mu$, mas o Teorema de Radon-Nikodým não se aplica. Porque?

2.61. Estude (Wikipedia por exemplo) a medida gerada pela função de Cantor, que é singular a medida de Lebesgue. Ver Exemplo 2.9, p.37.

2.62. Prove a unicidade de f no Teorema de Radon-Nikodým.

2.63. Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável por partes.

(a) Prove que g é absolutamente contínua.

(b) Se g é crescente, pode-se decompor $g = g_1 + g_2$ com g_1 absolutamente contínua e crescente e g_2 função constante por partes (descontinuidades do tipo pulos).

2.64. Seja ν uma medida finita definida nos borelianos em $\mathbb{R}$. Defina $g(x) = \nu\left((-\infty, x]\right)$, chamada de cdf (cumulative distribution function). Suponha que g é continuamente diferenciável. Seja λ a medida de Lebesgue. Prove que: (a) $\nu \ll \lambda$. (b) $\dfrac{d\nu}{d\lambda} = g'$.

Capítulo 3
Probabilidade e Medida

3.1 Introdução

Nesta seção traduzimos o vocabulário da Teoria da Medida para o da Teoria de Probabilidade. Além disso construímos probabilidade em espaço de lançamento infinito de moedas e espaço de funções, que envolve a construção de medida em produto cartesiano infinito (enumerável e não-enumerável) de espaços de medida.

3.2 Espaço de Probabilidade

DEFINIÇÃO 3.1 *Dado um espaço de medida (Ω, Σ, μ), dizemos que é um* **espaço de probabilidade** *se $\mu(\Omega) = 1$. Neste caso denotamos a medida μ por P e dizemos que (Ω, Σ, P) é um espaço de probabilidade.*

- Ω é o **espaço amostral**.
- Os elementos da σ-álgebra Σ são os **eventos**.
- A cada evento $A \in \Sigma$ associamos sua **probabilidade** $P(A)$.
- Uma função mensurável $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada de **variável aleatória** (va).
- A integral $\int X\,dP$ é chamada de **esperança** da variável aleatória X, denotada por $E(X)$.
- Uma sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias é chamada de **processo estocástico discreto**. Uma família $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de variáveis aleatórias é chamada de **processo estocástico contínuo**.

Exemplo 3.1 *Considere um jogo onde se lançam 2 dados a cada instante de tempo. Podemos considerar o processo estocástico discreto X_n igual a soma do valor dos 2 dados a cada instante. As probabilidades dos eventos $\{X_n < a\}$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ podem ser calculados facilmente.*

Exemplo 3.2 *O valor S_t de uma ação a cada instante de tempo é um exemplo de processo estocástico contínuo. As probabilidades dos eventos $\{S_t < a\}$ para qualquer $a, t \in \mathbb{R}$ é um problema básico em finanças matemática.*

O espaço de eventos ser uma σ-álgebra significa, em linguagem coloquial, que dados eventos A e B são eventos também:

- a não ocorrência de A, isto é, $A^{\complement}$;
- a ocorrência de A **ou** B, isto é, $A \cup B$;
- a ocorrência de A **e** B, isto é, $A \cap B$.

A necessidade de incluir uniões enumeráveis é mais sutil. Um exemplo aparece considerando um jogo de dados em que o jogador deve jogar o dado repetidamente até que apareça o número 6. Dada a possibilidade do jogo nunca acabar e se repetir infinitamente, temos que considerar uniões infinitas enumeráveis de eventos. Outro exemplo é se S_t é o valor de uma ação no instante t, determinar qual a probabilidade que ao final de todo dia a ação esteja com valor acima de K.

Dada $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é natural querer atribuir probabilidade a $\{a < X < b\}$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Assim a hipótese de X ser mensurável (=variável aleatória) é natural.

DEFINIÇÃO 3.2 *Dois eventos A e B são ditos* **independentes** *se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

O conceito de independência entre eventos juntamente com o de **probabilidade condicional**, ambos sem correspondente na Teoria da medida, inicia o caminho que separa as duas teorias, fazendo com que a Teoria de Probabilidade seja muito mais do que simples aplicação da Teoria da Medida. Ver **esperança condicional** no Exercício 2.59, p.45.

3.3 Espaço de Lançamentos de Moedas

Atribuir probabilidade a eventos associados ao lançamento de uma moeda n vezes é simples. Todo subconjunto do espaço amostral possui probabilidade e a σ-álgebra é trivial com 2^n elementos. Nesta seção o desafio é fazer isto no espaço de infinitos lançamentos de moeda, cujos métodos servirão para construirmos na próxima seção probabilidade no espaço dos caminhos (funções).

Seja $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de sequências infinitas de lançamentos de moeda, caras e coroas, que representaremos por 0's e 1's. É um produto cartesiano infinito enumerável do conjunto $\{0,1\}$. Podemos representar um elemento $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ por $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ ou como uma função $\omega : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, e $\omega = (\omega(1), \ldots, \omega(n), \ldots)$. Para construir uma medida de probabilidade no espaço de funções $\Omega = \mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0,1\}) = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ precisamos definir projeções e conjunto cilíndricos.

DEFINIÇÃO 3.3 (projeção) *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos a* **projeção** *nas n primeiras coordenadas $\Pi_n : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^n$ por $\Pi_n(\omega) = (\omega(1), \ldots, \omega(n))$.*

DEFINIÇÃO 3.4 (cilindro) *Dado $I \subset \{0,1\}^n$, definimos o* **cilindro** *$C(n; I) = \Pi_n^{-1}(I) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

A σ-álgebra de $\{0,1\}$ vai gerar uma σ-álgebra em Ω da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 3.5 *A σ-álgebra de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é gerada pela família de cilindros $C(n; I)$ indexada por $n \in \mathbb{N}, I \subset \{0,1\}^n$, a menor σ-álgebra que torna mensurável Π_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Esta σ-álgebra vai conter mais do que somente imagens inversas de Π_n (porque? Exercício 3.3, p.50). Construimos a probabilidade $\widetilde{P}$ nesta σ-álgebra da seguinte forma:

(a) Definimos a probabilidade $\widetilde{P}$ de cilindros através da probabilidade do evento $I \subset \{0,1\}^n$, que depende de um número finito n de lançamentos de moedas. Assim $\widetilde{P}(C(n,I)) = P_n(I)$, onde $P_n(I)$ é a probabilidade de I ocorrer em $\{0,1\}^n$.

(b) Aplicamos o Teorema de Extensão de Kolmogorov (Teorema 3.10, p.50) na família de probabilidades P_n para estender a probabilidade $\widetilde{P}$ para toda σ-álgebra.

A probabilidade obtida neste processo é equivalente a de Lebesgue em $(0,1]$ (Exercício 3.4, p.51). Assim existem conjuntos de sequências de lançamentos que não têm probabilidade bem definida (conjuntos de Vitali por exemplo). Na prática podemos calcular a probabilidade $\widetilde{P}$ de eventos C que não são cilindros utilizando continuidade da medida (Lema 1.15, p.6): determine sequência monótona de cilindros $C_n \to C$ e $\widetilde{P}(C_n) \to \widetilde{P}(C)$.

3.4 Probabilidade em Produtos Cartesianos Infinitos

Uma motivação desta seção é construir uma medida de probabilidade no espaço dos caminhos contínuos (funções contínuas), movimento Browniano por exemplo. Veremos que este problema é equivalente a construir probabilidade em um produto cartesiano infinito.

Começamos com **Teoria dos Conjuntos**, estudando produto cartesiano infinito $\prod_{i \in I} A_i$, com conjunto de índices I podendo ser não-enumerável. Na seção anterior $I = \mathbb{N}$ e $A_i = \{0,1\}$. Produto cartesiano infinito é definido como um certo subconjunto do espaço das funções:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in \mathcal{F}(I; \bigcup_{i \in I} A_i) \mid \quad f(i) \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Frequentemente $A_i = A$ para todo $i \in I$, simplificando a definição pois $\prod_{i \in I} A = \mathcal{F}(I; A) = A^I$. Um exemplo é o espaço de sequências de números reais $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, que pode ser visto como um elemento $a \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{N}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, funções $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(i) = a_i \in \mathbb{R}$.

Seja $\mathbb{T}$ um conjunto não-vazio (por exemplo $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou $[0,\ \infty]$) representando tempo discreto ou contínuo, embora não assumamos nenhuma estrutura em $\mathbb{T}$. Queremos construir uma probabilidade em $\mathbb{R}^{\mathbb{T}} = \mathcal{F}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$, o espaço das funções $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, que representam caminhos ou processos dependentes do tempo. Para isto precisamos de uma σ-álgebra neste espaço e definir probabilidades. A solução será similar ao do espaço de moedas: definir projeções finitas, tipo janelas onde o caminho pode passar, e definir uma família de probabilidades de passagem por estas janelas. A σ-álgebra será definida por estas projeções finitas e o Teorema de Kolmogorov fornecerá a probabilidade estendida para todo espaço de caminhos. Como referência veja [7].

DEFINIÇÃO 3.6 *(projeção) Dado $n \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{T}^n$ com $|u| = n$ o seu número de elementos, $u = (t_1, \ldots, t_n)$, definimos a* **projeção** $\Pi_u : \mathbb{R}^{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^{|u|}$ *por* $\Pi_u(w) = (w(t_1), \ldots, w(t_n))$.

DEFINIÇÃO 3.7 (cilindros) *Dados $n \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{T}^n$ e um boreliano $B \subset \mathbb{R}^{|u|}$, definimos o* **cilindro** $C(u; B) = \Pi_u^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, *o subconjunto das funções $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ tais que $\Pi_u(w) \in B$.*

Observação 3.1 *Pode-se pensar nas restrições às n primeiras coordenadas como n "janelas" para passagem dos caminhos.*

DEFINIÇÃO 3.8 *A σ-álgebra de $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ é gerada pela família de cilindros $C(u; B)$ indexada por $u \in \mathbb{T}^n$ e boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$, a menor σ-álgebra que torna mensurável a família de projeções Π_u para todo $u \in \mathbb{T}^n, n \in \mathbb{N}$.*

Quanto a probabilidade, precisamos de uma família de probabilidades P_u definida em cada $\mathbb{R}^{|u|}$ com consistência no sentido de Kolmogorov.

DEFINIÇÃO 3.9 (consistência de Kolmogorov) *Dizemos que uma família de probabilidades P_u definida em $\mathbb{R}^{|u|}$, com $u \in \mathbb{T}^n$, é consistente no sentido de Kolmogorov se $P_u(B \times \mathbb{R}^k) = P_v(B)$ para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}^{|v|}$ e $v(i) = u(i)$ para $i = 1, \ldots, |v|$ (note que $|v| + k = |u|$).*

A demonstração do Teorema de extensão de Kolmogorov é baseado no Teorema 1.24, p.10 (Teorema de extensão de Carathéodory). Trata-se da construção da medida produto para produtos infinitos, incluindo produtos não-enumeráveis. Fundamental ser Probabilidade pois $P(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}) = P(\prod_{i \in \mathbb{T}} \mathbb{R}) = \prod_{i \in \mathbb{T}} P(\mathbb{R}) = \prod_{i \in \mathbb{T}} 1 = 1$, isto é, $1 \cdot 1 \cdot 1$ (produto infinito não necessariamente enumerável) é igual a 1.

TEOREMA 3.10 (extensão de Kolmogorov) *Dado uma família de probabilidade consistente no sentido de Kolmogorv existe uma única medida de probabilidade P na σ-álgebra gerada pelos cilindros tal que $P(C(u; B)) = P_u(B)$ para todo $u \in \mathbb{T}^n$ e boreliano $B \subset \mathbb{R}^{|u|}$.*

Prova: Veja [2], [7]. ■

Observação 3.2 *Se $\mathbb{T}$ é não-enumerável e A um elemento da σ-álgebra gerado pelos cilindros em $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, pode-se mostrar que A é determinado por um número* **enumerável** *de restrições. Logo existem $B_1, B_2, \ldots$ borelianos de $\mathbb{R}$ e $t_1, t_2, \ldots, \in \mathbb{T}$ tais que $A = \{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}; w(t_i) \in B_i$ para todo $i \in \mathbb{N}\}$. Segue (Exercício 3.9, p.51) que o conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ não é mensurável e nas aplicações consideramos subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$. Ver [9].*

Pode-se introduzir uma σ-álgebra em $C[0, 1]$ (funções reais definidas em $[0, 1]$ contínuas) utilizando conjuntos cilindricos, como fizemos agora, ou, partindo da métrica uniforme, como a σ-álgebra dos borelianos (abertos gerados pela métrica). Pelo Exercício 3.10, p.51 são idênticas.

3.5 Exercícios do Capítulo 3. Probabilidade e Medida

3.5.1 Lançamento de Moedas: Espaço de Probabilidade

3.1. Descreva e determine elementos que caracterizem o cilindro da Definição 3.4, p.48 se:
(a) $n = 3$ e $I = \{(a, b, 1);\ a, b \in \{0, 1\}\}$. (a) $n = 4$ e $I = \{(a, b, 1, c);\ a \in \{0, 1\}, b + c = 1\}$.

3.2. Seja $\Pi_i : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ definido por $\Pi_i(\omega) = \omega(i)$, o i-ésimo lançamento. Seja $A_i = \Pi_i^{-1}(1)$. Prove que $P(A_i) = 1/2$. Note que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0, 1\})$.

3.3. Prove que cada um dos conjuntos abaixo não é cilíndrico mas está na σ-álgebra gerada por cilindros. Determine a probabilidade de cada evento assumindo que a moeda é honesta.

(a) A é o conjunto unitário formado pela sequência constante igual a 1.

(b) B é o conjunto de todas sequências que eventualmente ficam constante igual a 1, isto é $B = \{\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \ \exists N > 0, \omega(i) = 1\ \forall i \geq N\}$.

3.4. (adaptado de [2] p.31) Seja $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e C_0 o conjunto vazio e uniões finitas de cilindros $C(n,I)$ disjuntos.

(a) Mostre que C_0 é uma álgebra.

(b) Mostre que P é finitamente aditiva em C_0.

(c) Dado I uma sequência de n lançamentos, defina $P(C(n;I))) = 2^{-n}$ e estenda P para C_0 por aditividade. Compare a medida P com a medida de Lebesgue definida em $(0,1]$.

Dica: Todo $x \in (0,1]$ possui expansão na base 2 como uma sequência de 0's e 1's.

3.5.2 Probabilidade em Espaço de Funções

3.5. Desenhe caminhos (pense como "janelas" onde passam) que representem o conjunto cilíndrico da Definição 3.7, p.49 se $\mathbb{T} = [0,4]$:

(a) $n = 2$, $u = (1,3)$ e $B = [-1,0]\times[2,3]$. (b) $n = 3$, $u = (1,3,2)$ e $B = [-1,0]\times[2,3]\times\{0\}$.

3.6. (converso do Teorema de Kolmogorov) Seja P uma medida definida na σ-álgebra do $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ com $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Defina P_n uma medida no $\mathbb{R}^n$ por $P_n(B) = P(\Pi_n^{-1}(B))$ para todo boreliano B em $\mathbb{R}^n$. Prove que $P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B)$. Assim a consistência de Kolmogorov surge naturalmente.

3.7. Prove que o conjunto de todos cilindros $C(u;B)$ com B um boreliano do $\mathbb{R}^{|u|}$ é uma álgebra de conjuntos. Dica: A união é a parte delicada. Deve-se provar o seguinte lema: Dado $C(u;B)$ existem v, D com $|v| > |u|$ tais que $C(v;D) = C(u;B)$.

3.8. Pode-se considerar três σ-álgebras no espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, gerada por (a), (b), ou (c). Todas são iguais. Prove isso.

(a) união finita de conjuntos cilíndricos cuja projeção são abertos do $\mathbb{R}^n$.

(b) união finita de conjuntos cilíndricos cuja projeção são borelianos do $\mathbb{R}^n$.

(c) união finita de conjuntos cilíndricos cuja projeção são produtos cartesianos de borelianos (ou de intervalos ou abertos) de $\mathbb{R}$.

3.9. Prove que o conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ não é mensurável seguindo o roteiro:

(a) Seja $C \subset \mathbb{R}^T$ o subconjunto das funções contínuas. Caso fosse mensurável, pela Observação 3.2, p.50, $C = \{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}; w(t_i) \in B_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$.

(b) Prove que existem funções descontínuas em $\{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{T}}; w(t_i) \in B_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$.

3.10. Mostre que a σ-álgebra dos borelianos em $C[0,1]$ (espaço das funções contínuas) com norma uniforme é igual a σ-álgebra gerada pela família de conjuntos cilíndricos. Ver [9].

Referências Bibliográficas

[1] Bartle R.G.; *The Elements of integration and Lebesgue measure*; John Wiley & Sons, Inc., New York, (1995).

[2] Billingsley, Patrick. *Probability and Measure* John Wiley & Sons 2ed (1986).

[3] Federer, H. (1996) Geometric Measure Theory, Springer, New York.

[4] Fremlin, D. H.; *Measure Theory.* Capítulos 11, 12 e 13. Vários exercícios foram retirados deste livro. University of Essex, (2009). Endereço: `http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm` Acessado em julho/2009.

[5] Halmos P.R.; *Measure Theory*; Van Nostrand, 1950; Halmos, Paul R. Measure Theory. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., (1950), MR0033869.

[6] *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`

[7] Martin, Luiz San; Marques, Mauro S. de F.; *Cálculo Estocástico.* 18o Colóquio Brasileiro de Matemática. Vol. 07. IMPA (1991)

[8] Royden, H. L.; *Real Analysis;* Macmillan Publishing Company, New York, (1988).

[9] Shiryaev, Albert N.; Probability. Graduate Texts in Mathematics 95. Springer Verlag (1984).

[10] Wikipedia, diversas páginas. Páginas: Measure, Lebesgue Measure e Sigma-Algebra. Endereço: `http://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics)`, etc. Acessado em julho/2015.