Imersões de Sobolev V0.2

Prof. Marco Aurélio P. Cabral

Abril de 2007

ABSTRACT: This text is based on "How to remember the Sobolev inequalities" by Daniel B. Henry; Differential equations (São Paulo, 1981), pp. 97–109, *Lecture Notes in Math.*, **957**, Springer, Berlin-New York, 1982. Introducing the concept of net smoothness and rate of decrease at infinity for functions belonging to Sobolev or Hölder spaces one is can understand relations among them (continuos inclusions, interpolations) that are easy to remember.

Neste texto damos uma abordagem intuitiva (sem rigor) para as imersões de Sobolev.

Os casos limites (igualdades ao invés de desigualdades) podem possuir exceções, mas não vamos nos preocupar com isso.

A hipótese básica é que Ω_d é uma variedade regular, compacta de dimensão d.

Casos de interesse são:

a) U um aberto em $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular, que corresponde a Ω_n.

b) ∂U, que corresponde a Ω_{n-1}.

Desta forma estamos incluindo neste formato a teoria de traço. Mais ainda, podemos permitir espaços de Sobolev fracionários e até mesmo negativos dentro deste *framework*.

O principal conceito a ser introduzido é o de *net smoothness* de um espaço de Sobolev.

DEF (*net smoothness* para Sobolev) Seja $W^{m,p}(\Omega_d)$ o espaço de Sobolev modelado em $L^p(\Omega_d)$ com m (pode ser fracionário ou, até mesmo negativo) derivadas no domínio Ω_d, uma variedade suave de dimensão $d > 0$ e $1 < p < \infty$. Definimos a **net smoothness** por

$$\beta(W^{m,p}(\Omega_d)) = m - \frac{d}{p}.$$

DEF (*net smoothness* para Hölder) Seja $C^{m,k}(\overline{\Omega}_d)$ o espaço das funções Hölder contínuas. Definimos a *net smoothness* deste espaço por

$$\beta(C^{m,k}(\overline{\Omega}_d)) = m + k.$$

Com abuso de notação podemos denotar este espaço por $C^{\beta}(\overline{\Omega}_d)$, com $\beta = k+\alpha$ com $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha < 1$. Note que este caso corresponde ao de Sobolev quando $p = \infty$ e $k = 0$, pois as funções L^∞ estão na fronteira entre funções de Sobolev e contínuas. A idéia básica é que β determina o grau de diferenciabilidade da função. Do modo como foi definido, note que se u tem *net smoothness* β, $D^\alpha u$ tem net smoothnes $\beta - |\alpha|$.

Funções Hölder contínuas sempre possuem $\beta > 0$. Já o caso $\beta < 0$ representam as funções "descontínuas", em diversos graus.

Seja β a *net smoothness* de X e β' a *net smoothness* de X'. O teorema diz que X está imerso continuamente e compactamente em X' se, e somente se $\beta > \beta'$.

Alguns exemplos, assumindo Ω um aberto regular limitado em $\mathbb{R}^n$ são:

a) $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,1-p/n}(\overline{\Omega})$ para $p > n$.

b) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$ para $p > 1$ (traço).

OBS: If Ω_d is unbounded we need conditions on the *rate of decrease at infinity* (the author calls it *smallness at infinity*). For $W^{m,p}$ is is defined as $1/p$.

caso ambos espaços sejam espaços de Sobolev: $1/p \geq 1/p'$. Obteremos somente imersões contínuas.

OBS: Se os espaços são W_0, a geometria da fronteira não interessa.