Superfícies de Curvatura Média Constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Walcy Santos

Trabalho em conjunto com Nelli, Sa Earp e Toubiana.

- $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão isométrica.

Trabalho em conjunto com Nelli, Sa Earp e Toubiana.

- $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão isométrica.
- M^2 com curvatura média constante H.

Trabalho em conjunto com Nelli, Sa Earp e Toubiana.

- $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão isométrica.
- M^2 com curvatura média constante H.
- A fronteira de M, ∂M é formada por uma curva convexa ou duas curvas convexas paralelas de classe $\mathcal{C}^2$ em planos paralelos $(\partial M \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\} \bigcup \mathbb{H}^2 \times \{t_1\})$.

Trabalho em conjunto com Nelli, Sa Earp e Toubiana.

- $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão isométrica.
- M^2 com curvatura média constante H.
- A fronteira de M, ∂M é formada por uma curva convexa ou duas curvas convexas paralelas de classe $\mathcal{C}^2$ em planos paralelos $(\partial M \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\} \bigcup \mathbb{H}^2 \times \{t_1\})$.

Trabalho em conjunto com Nelli, Sa Earp e Toubiana.

- $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão isométrica.
- M^2 com curvatura média constante H.
- A fronteira de M, ∂M é formada por uma curva convexa ou duas curvas convexas paralelas de classe $\mathcal{C}^2$ em planos paralelos $(\partial M \subset \mathbb{H}^2 \times \{t_0\} \bigcup \mathbb{H}^2 \times \{t_1\})$.

Vamos estudar sob que condições M herda a simetria de sua fronteira. Em particular estudaremos o caso em que as curvas são círculos.

Superfícies Rotacionais

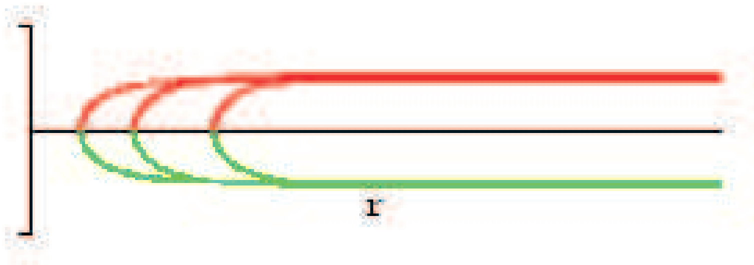
Superfícies Rotacionais

Superfícies Rotacionais com $H \leq \dfrac{1}{2}$

Superfícies Rotacionais

Superfícies Rotacionais com $H \leq \dfrac{1}{2}$

- Mínimas – Superfícies do tipo Catenóide - sempre entre dois planos com distância no máximo π.



Superfícies Rotacionais

Superfícies Rotacionais

Superfícies Rotacionais com $0 < H \leq 1/2$- A Família possui três tipos fundamentais de superfícies:

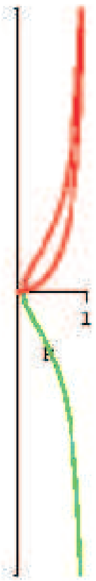
Superfícies Rotacionais

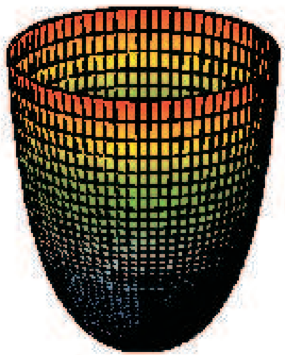
Superfícies Rotacionais com $0 < H \leq 1/2$- A Família possui três tipos fundamentais de superfícies:

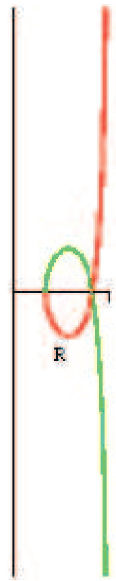
- Simplesmente conexa - denotada por S_1^H
- tipo anel
- não mergulhada

Superfícies Rotacionais

Superfícies Rotacionais







Primeiro Resultado

Teorema 1.

Primeiro Resultado

Teorema 1. *Seja M uma superfície compacta imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuja fronteira é uma curva convexa C contida em um plano horizontal. Suponha que M possui curvatura média constante $H \in (0, \frac{1}{2}]$. Então M é um gráfico vertical. Em particular M possui gênero zero e herda as mesmas simetrias de sua fronteira. Se C é um círculo, então M é parte de uma superfície simplesmente conexa rotacional S_1^H que contém C.*

Princípio do Máximo

Princípio do Máximo

Sejam M_1 e M_2 duas superfícies com curvatura média constante H_1 e H_2, respectivamente. Suponha que

Princípio do Máximo

Sejam M_1 e M_2 duas superfícies com curvatura média constante H_1 e H_2, respectivamente. Suponha que

- Existe um ponto $P \in M_1 \bigcap M_2$ tal que M_1 e M_2 são tangentes em P;
- $H_1 \geq H_2$;
- Em uma vizinhança de P, M_2 está acima de M_1, com relação a orientação dada pelo vetor curvatura média.

Princípio do Máximo

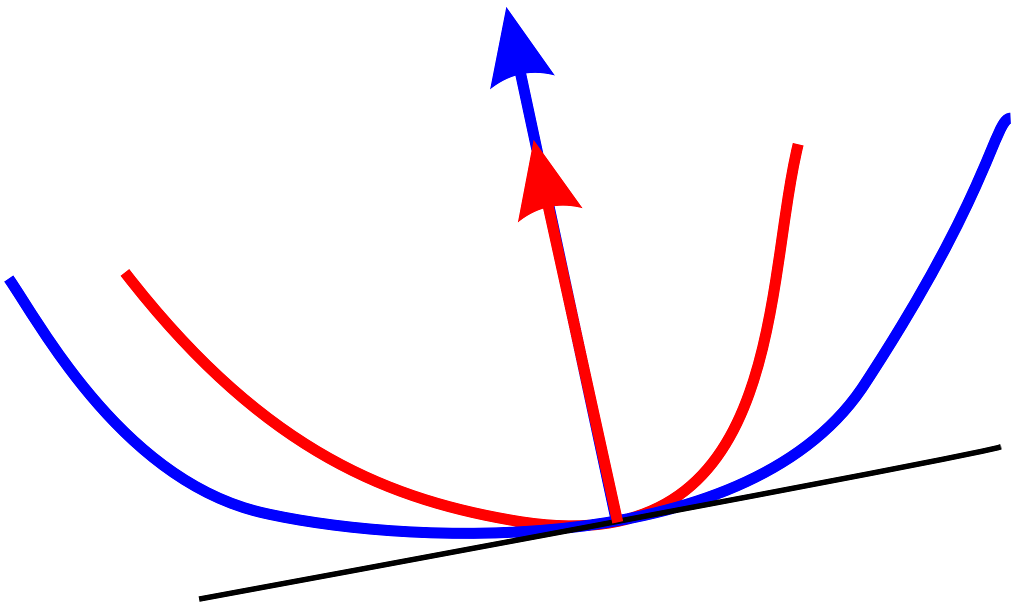
Sejam M_1 e M_2 duas superfícies com curvatura média constante H_1 e H_2, respectivamente. Suponha que

- Existe um ponto $P \in M_1 \bigcap M_2$ tal que M_1 e M_2 são tangentes em P;
- $H_1 \geq H_2$;
- Em uma vizinhança de P, M_2 está acima de M_1, com relação a orientação dada pelo vetor curvatura média.

Então M_1 e M_2 coincidem em uma vizinhança de P.

Princípio do Máximo

Princípio do Máximo



Resultados Auxiliares

Resultados Auxiliares

Seja K um conjunto compacto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Para cada $H \in (0, \frac{1}{2}]$, definimos $\mathcal{F}_K^H$ da seguinte forma: B pertence a $\mathcal{F}_K^H$ se sua fronteira ∂B é obtida de S_1^H ou por translações verticais e horizontais ou por simetria em relação a planos horizontais e K está contido no lado convexo em média de B.

Resultados Auxiliares

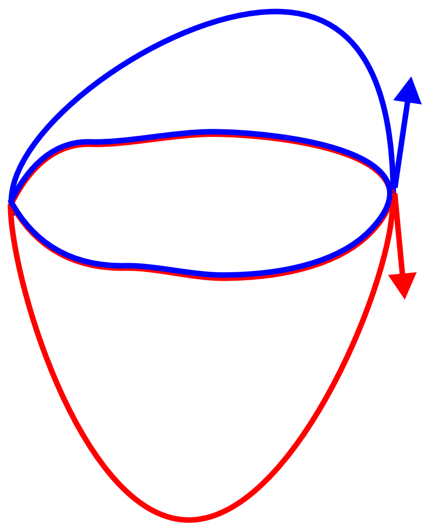
Seja K um conjunto compacto em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Para cada $H \in (0, \frac{1}{2}]$, definimos $\mathcal{F}_K^H$ da seguinte forma: B pertence a $\mathcal{F}_K^H$ se sua fronteira ∂B é obtida de S_1^H ou por translações verticais e horizontais ou por simetria em relação a planos horizontais e K está contido no lado convexo em média de B.

Lema 1. (Lema do Fecho Convexo)(Nelli, Sa Earp) *Seja M uma superfície compacta imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura média constante $H \in (0, \frac{1}{2}]$. Então M está contida no fecho convexo da família $\mathcal{F}_{\partial M}^H$.*

Resultados Auxiliares

Resultados Auxiliares

Vamos introduzir a Fórmula do Fluxo. Sejam Σ e Q duas superfícies compactas suaves em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com fronteiras $\partial\Sigma = \partial Q$. Suponha que existe um domínio compacto U em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que a fronteira de U é $\partial U = \Sigma \cup Q$ e que seja orientável. Note que a fronteira de U é suave exceto possivelmente em $\partial\Sigma = \partial Q$.



Fórmula do Fluxo

Fórmula do Fluxo

Suponha que Σ é uma superfície compacta com curvatura média constante H. Sejam n_Σ, n_Q as orientações sobre Σ e Q que apontam para o interior de U. Denote por ν o vetor co-normal unitário de Σ ao longo $\partial\Sigma$, apontando para o interior de Σ. Seja $Y = \dfrac{\partial}{\partial t}$, então:

Fórmula do Fluxo.

$$\int_{\partial\Sigma} \langle Y, \nu \rangle = 2H \int_Q \langle Y, n_Q \rangle \quad (1)$$

Existência dos Gráficos

Vamos escolher o campo normal unitário a um gráfico de uma função u com a terceira componente positiva e vamos calcular a curvatura média com respeito a essa orientação:
O gráfico de uma função $u : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ possui curvatura média constante H se e somente se u satisfaz a seguinte EDP:

$$div_{\mathbb{H}} \left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} \right) = 2H$$

onde $div_{\mathbb{H}}$, $\nabla_{\mathbb{H}}$ são divergência hiperbólica e gradiente hiperbólico, respectivamente, e $W_u = \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2_{\mathbb{H}}}$, com $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ a norma em $\mathbb{H}^2$.

Existência dos Gráficos

Vamos escolher o campo normal unitário a um gráfico de uma função u com a terceira componente positiva e vamos calcular a curvatura média com respeito a essa orientação:
O gráfico de uma função $u : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ possui curvatura média constante H se e somente se u satisfaz a seguinte EDP:

$$div_{\mathbb{H}} \left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} \right) = 2H$$

onde $div_{\mathbb{H}}$, $\nabla_{\mathbb{H}}$ são divergência hiperbólica e gradiente hiperbólico, respectivamente, e $W_u = \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2_{\mathbb{H}}}$, com $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ a norma em $\mathbb{H}^2$.

Existência dos Gráficos

Considere o modelo do semi-espaço para $\mathbb{H}^2$, com coordenadas Euclideanas x, y, $y > 0$. Nesse modelo, a equação acima fica:

$$div\left(\frac{\nabla u}{W_u}\right) = \frac{2H}{y^2}$$

onde div é a divergência Euclideana e $W_u = \sqrt{1 + y^2(u_x^2 + u_y^2)}$.

Existência dos Gráficos

Considere o modelo do semi-espaço para $\mathbb{H}^2$, com coordenadas Euclideanas $x, y,\ y > 0$. Nesse modelo, a equação acima fica:

$$div\left(\frac{\nabla u}{W_u}\right) = \frac{2H}{y^2}$$

onde div é a divergência Euclideana e $W_u = \sqrt{1 + y^2(u_x^2 + u_y^2)}$.

Existência dos Gráficos

Existência dos Gráficos

Suponha que o plano que contém a fronteira C é $P = \{x_3 = 0\}$ e denote por D o domínio em P, limitado por C. O Lema do Fecho Convexo nos dá uma estimativa de altura e do gradiente na fronteira *a priori*, para o *Problema de Dirichlet para a equação da curvatura média* H $(0 < |H| \leq 1/2)$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Existência dos Gráficos

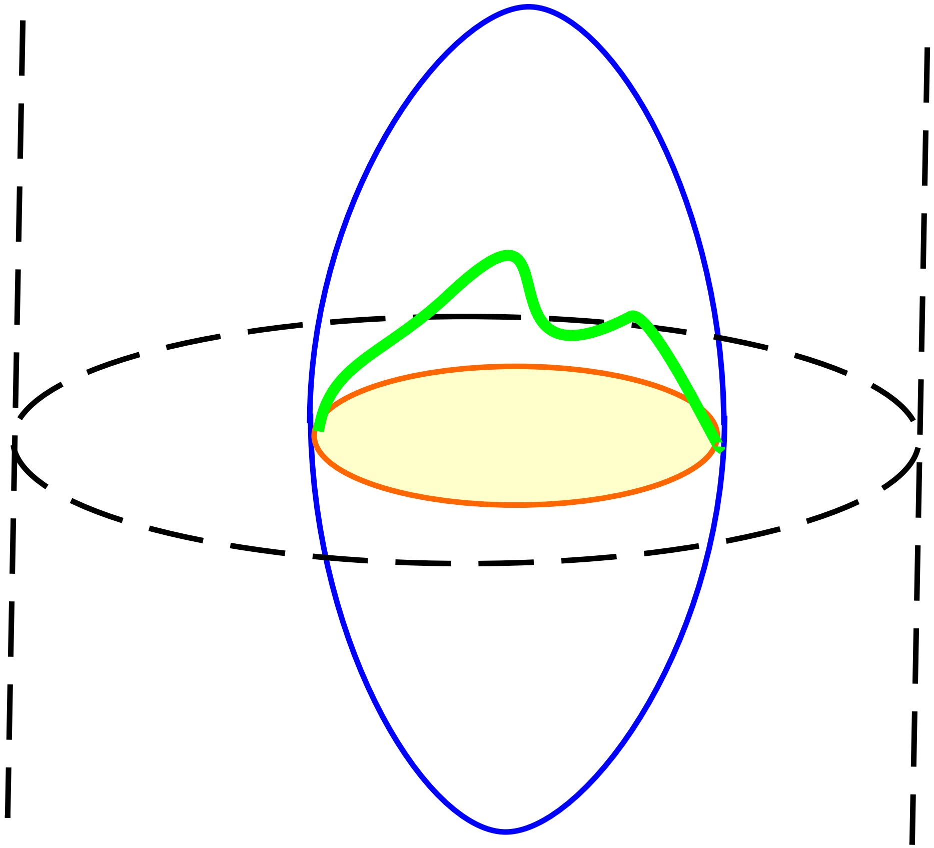
Suponha que o plano que contém a fronteira C é $P = \{x_3 = 0\}$ e denote por D o domínio em P, limitado por C. O Lema do Fecho Convexo nos dá uma estimativa de altura e do gradiente na fronteira *a priori*, para o *Problema de Dirichlet para a equação da curvatura média* H $(0 < |H| \leq 1/2)$ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Com isso é possível obter estimativas globais do gradiente. Logo, existe solução para o *Problema de Dirichlet para a equação da curvatura média H em D com valor zero em $C = \partial D$*. Portanto, obtemos um gráfico G_H com a mesma curvatura média e fronteira que M.

Idéia da prova do Teorema 1.

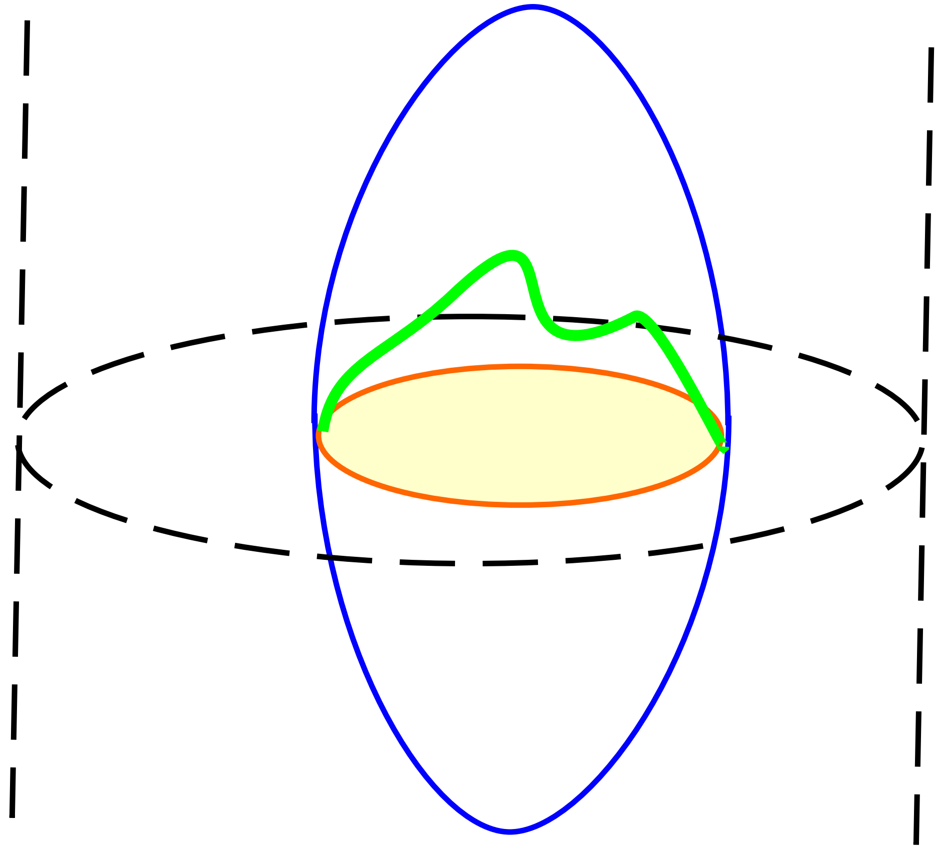
Idéia da prova do Teorema 1.

Pelo Lema 1, M está contida no fecho convexo da família $\mathcal{F}_C^H$. A fronteira desse fecho convexo é uma superfície compacta com curvatura média constante H simétrica em relação ao plano P e corta P exatamente na curva C. Denote por $\mathcal{D}_C^1$ a parte da fronteira do fecho convexo que está acima do plano P e por $\mathcal{D}_C^2$ a parte que está abaixo de P. O ponto principal aqui é que sendo C convexa, podemos alcançar qualquer ponto de C por fora com um círculo e portanto existe um elemento da família $\mathcal{F}_C^H$ contendo esse círculo.

Idéia da prova do Teorema 1.

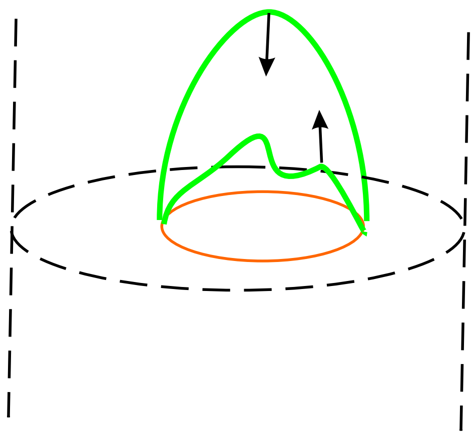


Idéia da prova do Teorema 1.



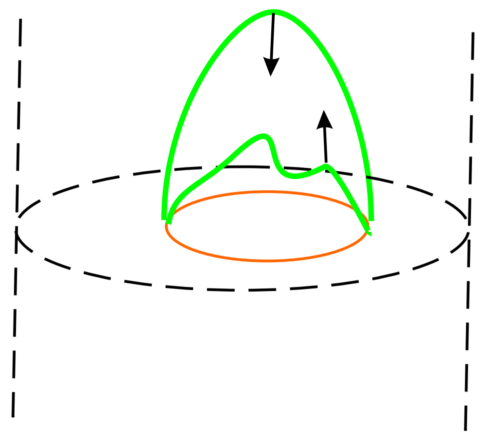
Idéia da prova do Teorema 1.

Vamos provar que M está contida em um dos dois semi-espaços determinados pelo plano P. Seja G_H o gráfico com curvatura média H e $\partial G_H = C$. A superfície $M \cup G_H$ é compacta, mergulhada e suave, exceto ao longo da curva C. Então podemos orientar $M \cup G_H$ de modo que a orientação induzida sobre M é dada pelo vetor curvatura média de M. Seja U o domínio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que $\partial U = M \cup G_H$.



Idéia da prova do Teorema 1.

Vamos provar que M está contida em um dos dois semi-espaços determinados pelo plano P. Seja G_H o gráfico com curvatura média H e $\partial G_H = C$. A superfície $M \cup G_H$ é compacta, mergulhada e suave, exceto ao longo da curva C. Então podemos orientar $M \cup G_H$ de modo que a orientação induzida sobre M é dada pelo vetor curvatura média de M. Seja U o domínio em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que $\partial U = M \cup G_H$.



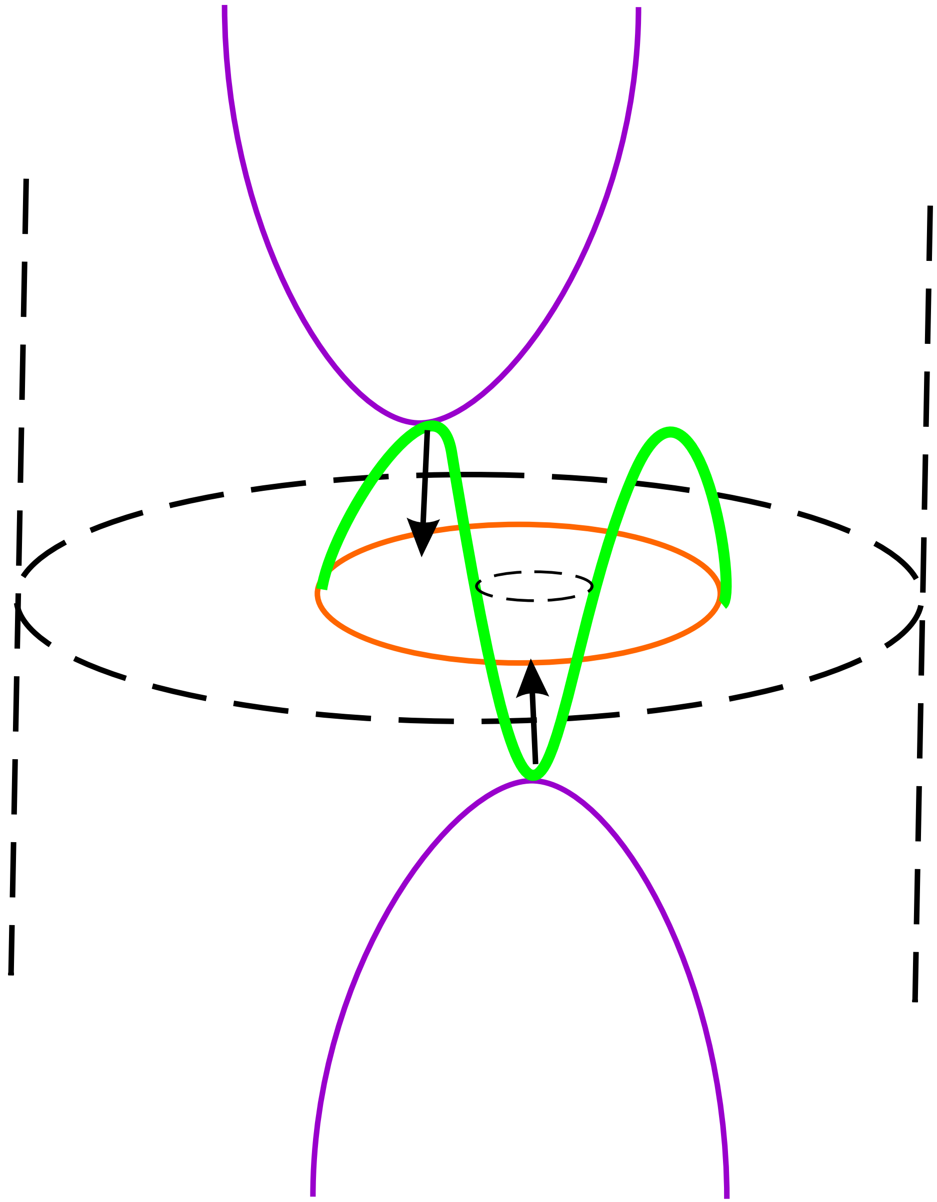
Idéia da prova do Teorema 1.

É claro que M não encontra P fora de D. Suponha por contradição que M corta D, então M contém pontos em ambos semi-espaços $\{x_3 > 0\}$, $\{x_3 < 0\}$. Pelo principio do máximo, o vetor curvatura média no ponto de maior altura de M, aponta para baixo, enquanto no ponto de menor altura ele aponta para cima, o que é uma contradição.
Portanto M está contida em um semi-espaço, digamos $\{x_3 \geq 0\}$.

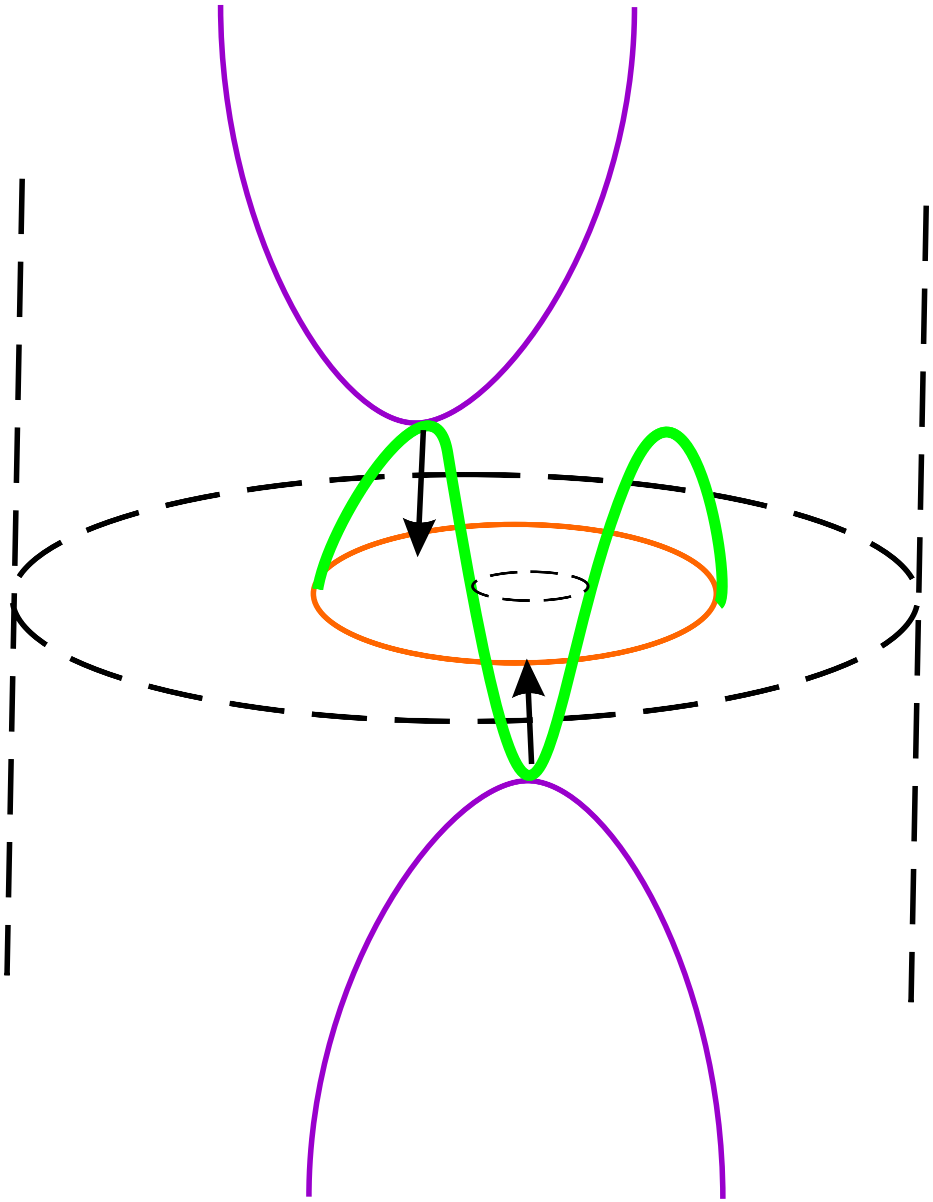
Idéia da prova do Teorema 1.

É claro que M não encontra P fora de D. Suponha por contradição que M corta D, então M contém pontos em ambos semi-espaços $\{x_3 > 0\}$, $\{x_3 < 0\}$. Pelo principio do máximo, o vetor curvatura média no ponto de maior altura de M, aponta para baixo, enquanto no ponto de menor altura ele aponta para cima, o que é uma contradição.
Portanto M está contida em um semi-espaço, digamos $\{x_3 \geq 0\}$.

Idéia da prova do Teorema 1.



Idéia da prova do Teorema 1.



Idéia da prova do Teorema 1.

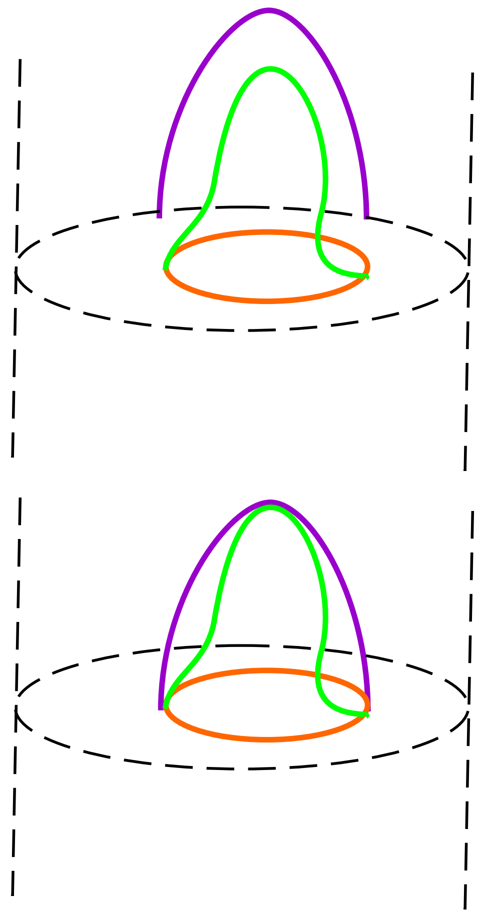
Idéia da prova do Teorema 1.

Agora, levantamos G_H, até uma posição em que ele fique separado de M e movendo de volta, concluímos que G_H não toca M até que as fronteiras de M e G_H coincidam. Logo, M está abaixo de G_H. Agora, repetindo esse processo movendo G_H para baixo e depois voltando, concluímos que M está acima de G_H, já que o vetor curvatura média de M aponta para o interior de $M \cup D$, pelo Principio do Máximo. Portanto $M = G_H$, como queríamos.

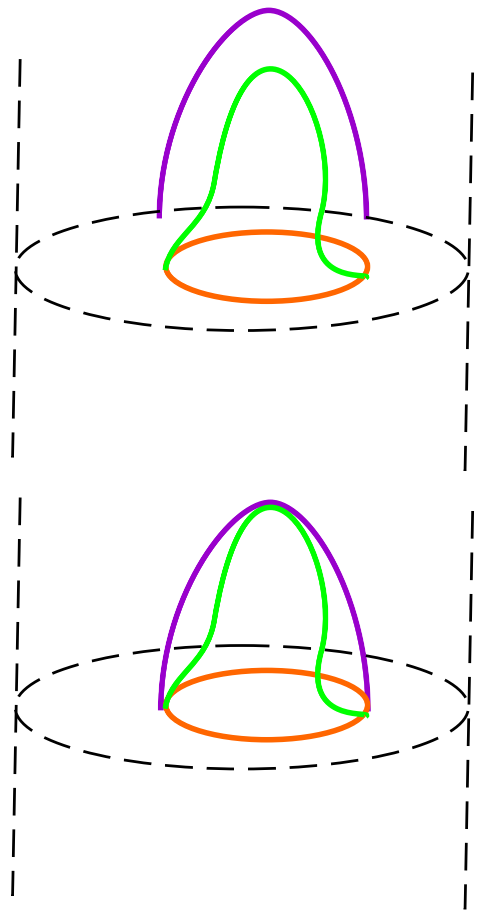
Idéia da prova do Teorema 1.

Agora, levantamos G_H, até uma posição em que ele fique separado de M e movendo de volta, concluímos que G_H não toca M até que as fronteiras de M e G_H coincidam. Logo, M está abaixo de G_H. Agora, repetindo esse processo movendo G_H para baixo e depois voltando, concluímos que M está acima de G_H, já que o vetor curvatura média de M aponta para o interior de $M \cup D$, pelo Principio do Máximo. Portanto $M = G_H$, como queríamos.

Idéia da prova do Teorema 1.



Idéia da prova do Teorema 1.



Idéia da prova do Teorema 1.

Idéia da prova do Teorema 1.

Agora, aplicamos o método de reflexão de Alexandrov com planos verticais e obtemos que M possui todas as simetrias de C.
Portanto, se C é um círculo, M é parte de uma superfície simplesmente conexa rotacional S_1^H que contém C.

Idéia da prova do Teorema 1.

Agora, aplicamos o método de reflexão de Alexandrov com planos verticais e obtemos que M possui todas as simetrias de C.
Portanto, se C é um círculo, M é parte de uma superfície simplesmente conexa rotacional S_1^H que contém C.

Vamos supor agora que M está imersa (não necessariamente mergulhada).

Idéia da prova do Teorema 1.

,

Idéia da prova do Teorema 1.

Suponha que C é um círculo.
Pelo Lema 1, M está contida no fecho convexo da família $\mathcal{F}_C^H$. Como C é um círculo, este fecho convexo é o domínio limitado pela parte compacta de S_1^H contendo C, digamos B_C^1, e sua reflexão com respeito ao plano horizontal que contém C, digamos B_C^2..
Seja ν_3^1, ν_3, ν_3^2 a terceira coordenada do vetor co-normal ao longo de C de B_C^1, M, B_C^2 respectivamente. Como M está entre B_C^1 e B_C^2, então em um ponto qualquer de C,

Idéia da prova do Teorema 1.

$$\nu_3^2 \leq \nu_3 \leq \nu_3^1 \quad (*)$$

Considere a Fórmula do Fluxo para M, com Q igual ao domínio planar limitado por C, $Y = (0,0,1)$ e $n_Q = (0,0,\pm 1)$ de acordo com a orientação dada por M. Então

$$\int_C \nu_3 = 2H Area(Q)$$

Para fixar as idéias, suponha que $n_Q = (0,0,1)$.
Agora, considere a Fórmula do Fluxo para B_C^1 e B_C^2, com Q igual ao domínio planar limitado por C, $Y = (0,0,1)$.

Idéia da prova do Teorema 1.

$$\nu_3^2 \leq \nu_3 \leq \nu_3^1 \quad (*)$$

Considere a Fórmula do Fluxo para M, com Q igual ao domínio planar limitado por C, $Y = (0,0,1)$ e $n_Q = (0,0,\pm 1)$ de acordo com a orientação dada por M. Então

$$\int_C \nu_3 = 2H Area(Q)$$

Para fixar as idéias, suponha que $n_Q = (0,0,1)$.
Agora, considere a Fórmula do Fluxo para B_C^1 e B_C^2, com Q igual ao domínio planar limitado por C, $Y = (0,0,1)$.

Idéia da prova do Teorema 1.

$$\int_C \nu_3^1 = 2H\,Area(Q) = -\int_C \nu_3^2$$

Então,

$$-\int_C \nu_3^2 = \int_C \nu_3 = \int_C \nu_3^1.$$

Se na equação (*), as desigualdades são estritas em todo ponto de C temos uma contradição.
Então existe pelo menos um ponto p em C tal que ν_3 coincide ou com ν_3^2 ou com ν_3^1 em p. Então, pelo Princípio do Máximo na Fronteira, M coincide com B_C^2 ou com B_C^1.
Para uma curva qualquer, o argumento é similar, usando gráficos.

Idéia da prova do Teorema 1.

$$\int_C \nu_3^1 = 2H\,Area(Q) = -\int_C \nu_3^2$$

Então,

$$-\int_C \nu_3^2 = \int_C \nu_3 = \int_C \nu_3^1.$$

Se na equação (*), as desigualdades são estritas em todo ponto de C temos uma contradição.
Então existe pelo menos um ponto p em C tal que ν_3 coincide ou com ν_3^2 ou com ν_3^1 em p. Então, pelo Princípio do Máximo na Fronteira, M coincide com B_C^2 ou com B_C^1.
Para uma curva qualquer, o argumento é similar, usando gráficos.

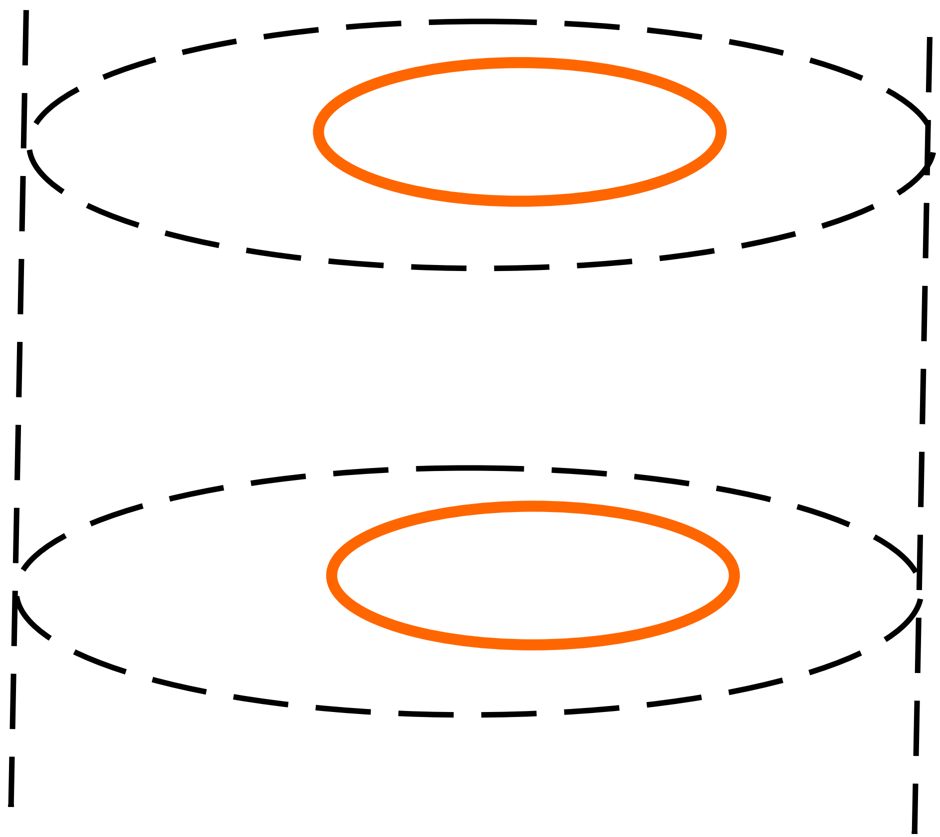
Curvas Paralelas

Curvas Paralelas

Dizemos que C_1 e C_2 são *Curvas Paralelas*, se elas são congruentes após uma translação vertical.

Curvas Paralelas

Dizemos que C_1 e C_2 são *Curvas Paralelas*, se elas são congruentes após uma translação vertical.



Curvas Paralelas

Curvas Paralelas

Teorema 2. *Seja M uma superfície compacta em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, cuja fronteira é formada por curvas convexas paralelas C_a, C_{-a}, nos planos $P_a = \{t = a\}$, $P_{-a} = \{t = -a,\ a > 0\}$ respectivamente. Suponha que M possui curvatura média constante H com $0 < |H| \leq 1/2$. Então M possui um plano horizontal de simetria. Se $2a > \pi$, então M está contida na faixa $\{-a \leq t \leq a\}$, com $M \cap \{-a \leq t \leq a\} = P_a \cup P_{-a}$. Além disso, M herda as simetrias de $C_a \cup C_{-a}$.*

Para círculos..

Para círculos..

Corolário. Seja M uma superfície compacta mergulhada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cuja fronteira é formada por dois círculos paralelos. Suponha que M curvatura média constante H com $0 < |H| \leq 1/2$. Seja d a distância entre as duas curvas da fronteira. Se $d > \pi$, então M é parte de uma superfície rotacional completa mergulhada de curvatura média constante H.

Idéia da prova do Teorema 2.

Idéia da prova do Teorema 2.

Seja D_a o domínio limitado em P_a cuja fronteira é C_a. Seja $ext(D_a) := P_a \setminus D_a$. Pelo Lema do Fecho Convexo, $M \cap ext(D_a) = C_a$, e de modo análogo $M \cap ext(D_{-a}) = C_{-a}$. Além disso, existem dois gráficos, digamos S_1 e S_2, tais que $M \cup S_1 \cup S_2$ é uma superfície fechada mergulhada, não suave apenas ao longo de $C_a \cup C_{-a}$. Note que existe um cilindro contendo M em seu interior e com curvatura média maior do que $1/2$ cuja fronteira é formada por dois grandes círculos em cada plano $P_a = \{t = a\}$, $P_{-a} = \{t = -a,\ a > 0\}$, tangente a fronteira de M, em cada ponto $p \in C_a$ e em seu simétrico em C_{-a}.

Idéia da prova do Teorema 2.

Idéia da prova do Teorema 2.

Portanto, a interseção de M com essa família de cilindros é $C_a \cup C_{-a}$. Usando essa família de cilindros verticais, concluímos que a interseção do cilindro vertical sobre $C_a \cup C_{-a}$ com M é $C_a \cup C_{-a}$.. Agora estamos em condições de aplicar a reflexão de Alexandrov usando planos horizontais para concluir que M possui um plano horizontal de simetria. Se $d > \pi$, então concluímos que o vetor curvatura média de M aponta para o interior de $M \cup S_1 \cup S_2$, usando como comparação superfícies mínimas rotacionais .

Idéia da prova do Teorema 2.

Idéia da prova do Teorema 2.

De fato, caso contrário, podemos usar a família de catenóides mínimos vindo infinito na direção de M e que toca M em um primeiro ponto de contato, se o vetor curvatura média de M aponta para fora de $M \cup S_1 \cup S_2$, temos uma contradição pelo Principio do Máximo.

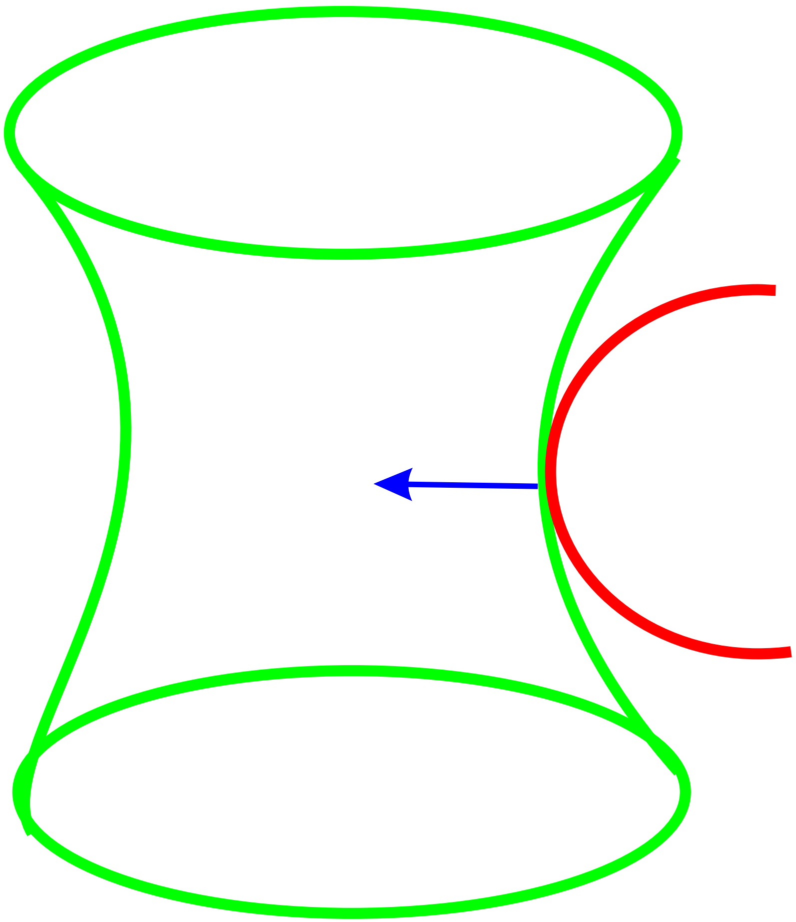
Idéia da prova do Teorema 2.

De fato, caso contrário, podemos usar a família de catenóides mínimos vindo infinito na direção de M e que toca M em um primeiro ponto de contato, se o vetor curvatura média de M aponta para fora de $M \cup S_1 \cup S_2$, temos uma contradição pelo Principio do Máximo.
Com isso, concluímos que M está contida em

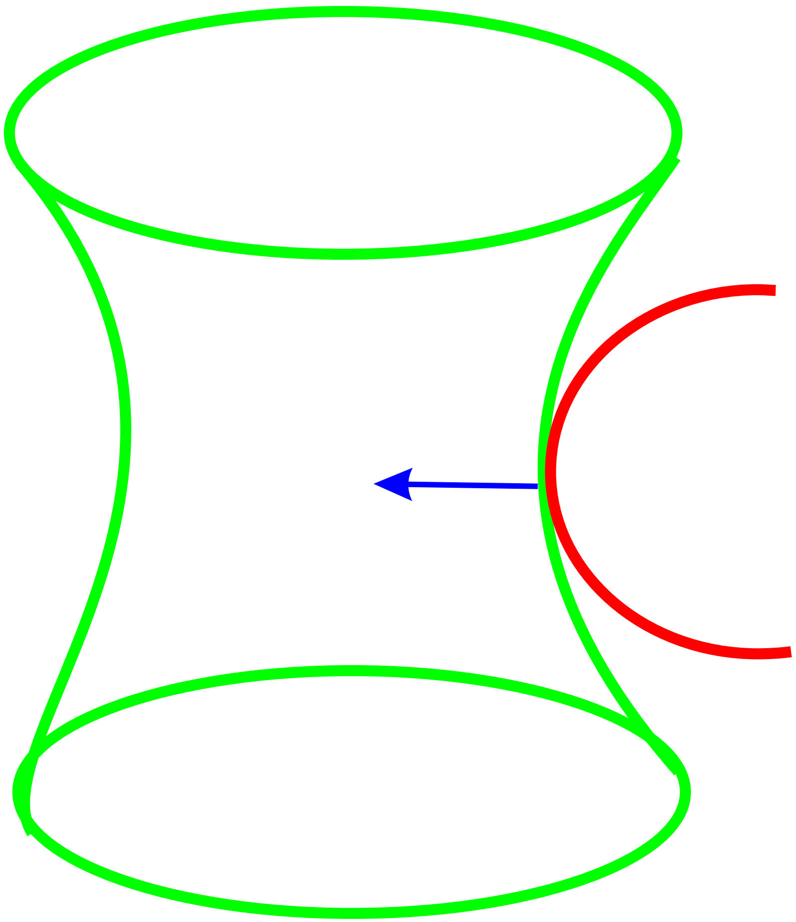
$$\{-a \leq t \leq a\},$$

com $M \cap \{-a \leq t \leq a\} = C_a \cup C_{-a}$. Logo M herda as simetrias de $C_a \cup C_{-a}$, aplicando Alexandrov com respeito a planos verticais.

Idéia da prova do Teorema 2.



Idéia da prova do Teorema 2.



Fronteira Assintótica

Fronteira Assintótica

Teorema. *Seja M uma superfície em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura média constante satisfazendo $0 < \delta \leq H(p) \leq 1/2$ em todo ponto $p \in M$. Suponha que a fronteira assintótica de M é uma curva $\mathcal{C}^1$ e que M é $\mathcal{C}^1$ até a fronteira assintótica (eventualmente M pode ter fronteira finita não vazia). Então a fronteira assintótica de M é um segmento vertical em $\partial_\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$.*