

Sobre a equação Korteweg-de Vries

Didier Pilod

Introdução

- **1834** S. Russel observou a propagação duma onda longa no canal de Edinburgh-Glasgow durante alguns kilometros.

→ Como modelisar a propagação de ondas longas em agua rasa para dar conta desse fenômeno?

- **1871** J. Boussinesq propôs um primeiro modelo admittindo soluções particular da forma $A \operatorname{sech}(x - ct)$.
- **1895** Korteweg e de Vries formularão a (agora famosa) equação

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0 \quad (1)$$

Introdução

- **1834** S. Russel observou a propagação duma onda longa no canal de Edinburgh-Glasgow durante alguns kilometros.
- Como modelisar a propagação de ondas longas em agua rasa para dar conta desse fenômeno?
- **1871** J. Boussinesq propôs um primeiro modelo admittindo soluções particular da forma $A \operatorname{sech}(x - ct)$.
 - **1895** Korteweg e de Vries formularão a (agora famosa) equação

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0 \quad (1)$$

Introdução

- **1834** S. Russel observou a propagação duma onda longa no canal de Edinburgh-Glasgow durante alguns kilometros.
- Como modelisar a propagação de ondas longas em agua rasa para dar conta desse fenômeno?
- **1871** J. Boussinesq propôs um primeiro modelo admtindo soluções particular da forma $A \operatorname{sech}(x - ct)$.
- **1895** Korteweg e de Vries formularão a (agora famosa) equação

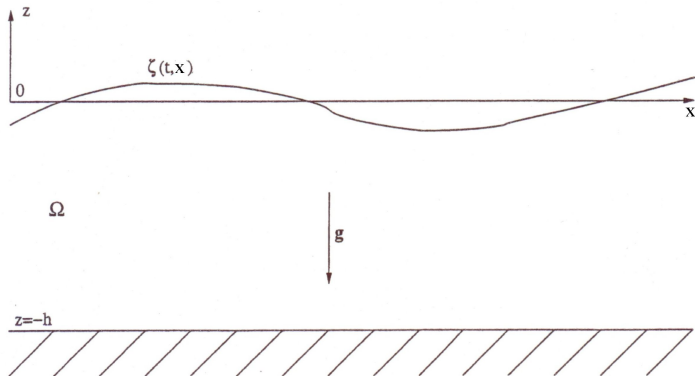
$$\partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0 \quad (1)$$

Introdução

- **1834** S. Russel observou a propagação duma onda longa no canal de Edinburgh-Glasgow durante alguns kilometros.
- Como modelisar a propagação de ondas longas em agua rasa para dar conta desse fenômeno?
- **1871** J. Boussinesq propôs um primeiro modelo admitindo soluções particular da forma $A \operatorname{sech}(x - ct)$.
 - **1895** Korteweg e de Vries formularão a (agora famosa) equação

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0 \quad (1)$$

1. Equações de Euler



1. Equações de Euler

- Incompressível+irrotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

$\Rightarrow \exists$ um potencial de velocidade ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

- Balanço das forças

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} = \mathbf{g}$$

- Condições de fronteira

$$\partial_t \zeta = (\partial_x \zeta, 1)^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = 0 \quad \text{em} \quad z = \zeta(t, x)$$

$$v_z = 0 \quad \text{em} \quad z = -h$$

1. Equações de Euler

- Incompressível+irrotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

$\Rightarrow \exists$ um potencial de velocidade ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla\phi$.

- Balanço das forças

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} = \mathbf{g}$$

- Condições de fronteira

$$\partial_t \zeta = (\partial_x \zeta, 1)^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = 0 \quad \text{em} \quad z = \zeta(t, x)$$

$$v_z = 0 \quad \text{em} \quad z = -h$$

1. Equações de Euler

- Incompressível+irrotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

$\Rightarrow \exists$ um potencial de velocidade ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

- Balanço das forças

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} = \mathbf{g}$$

- Condições de fronteira

$$\partial_t \zeta = (\partial_x \zeta, 1)^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = 0 \quad \text{em} \quad z = \zeta(t, x)$$

$$v_z = 0 \quad \text{em} \quad z = -h$$

1. Equações de Euler

- Incompressível+irrotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

$\Rightarrow \exists$ um potencial de velocidade ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

- Balanço das forças

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{P} = \mathbf{g}$$

- Condições de fronteira

$$\partial_t \zeta = (\partial_x \zeta, 1)^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = 0 \quad \text{em} \quad z = \zeta(t, x)$$

$$v_z = 0 \quad \text{em} \quad z = -h$$

2. Renormalização

Grandezas físicas relacionadas com nosso problema:

- $a :=$ amplitude típica das ondas.
- $h :=$ profundidade média.
- $\lambda :=$ comprimento de onda típico do escoamento.

Definimos

- $\mu := \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$, a condição de água rasa se escreve $\mu \ll 1$.
- $\epsilon := \frac{a}{h}$, as ondas são de amplitude fraca se $\epsilon \ll 1$.
- $S := \frac{\epsilon}{\mu}$ é chamado número de Stokes.

2. Renormalização

Grandezas físicas relacionadas com nosso problema:

- $a :=$ amplitude típica das ondas.
- $h :=$ profundidade média.
- $\lambda :=$ comprimento de onda típico do escoamento.

Definimos

- $\mu := \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$, a condição de água rasa se escreve $\mu \ll 1$.
- $\epsilon := \frac{a}{h}$, as ondas são de amplitude fraca se $\epsilon \ll 1$.
- $S := \frac{\epsilon}{\mu}$ é chamado número de Stokes.

2. Renormalização

Grandezas físicas relacionadas com nosso problema:

- $a :=$ amplitude típica das ondas.
- $h :=$ profundidade média.
- $\lambda :=$ comprimento de onda típico do escoamento.

Definimos

- $\mu := \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$, a condição de água rasa se escreve $\mu \ll 1$.
- $\epsilon := \frac{a}{h}$, as ondas são de amplitude fraca se $\epsilon \ll 1$.
- $S := \frac{\epsilon}{\mu}$ é chamado número de Stokes.

2. Renormalização

Grandezas físicas relacionadas com nosso problema:

- $a :=$ amplitude típica das ondas.
- $h :=$ profundidade média.
- $\lambda :=$ comprimento de onda típico do escoamento.

Definimos

- $\mu := \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$, a condição de água rasa se escreve $\mu \ll 1$.
- $\epsilon := \frac{a}{h}$, as ondas são de amplitude fraca se $\epsilon \ll 1$.
- $S := \frac{\epsilon}{\mu}$ é chamado número de Stokes.

2. Renormalização

Grandezas físicas relacionadas com nosso problema:

- $a :=$ amplitude típica das ondas.
- $h :=$ profundidade média.
- $\lambda :=$ comprimento de onda típico do escoamento.

Definimos

- $\mu := \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$, a condição de água rasa se escreve $\mu \ll 1$.
- $\epsilon := \frac{a}{h}$, as ondas são de amplitude fraca se $\epsilon \ll 1$.
- $S := \frac{\epsilon}{\mu}$ é chamado número de Stokes.

3. Equações de Bernoulli

Integramos e renormalizamos as equações de Euler e obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \partial_x^2 \phi + \partial_z^2 \phi = 0, & -1 < z < \epsilon \zeta, \\ \partial_z \phi = 0, & z = -1, \\ \partial_t \phi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\epsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 = 0, & z = \epsilon \zeta, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \zeta \partial_x \phi - \frac{1}{\mu} \partial_z \phi = 0, & z = \epsilon \zeta. \end{array} \right.$$

Problema: O domínio desse sistema não é fixo (com o tempo)!

3. Equações de Bernoulli

Integramos e renormalizamos as equações de Euler e obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \partial_x^2 \phi + \partial_z^2 \phi = 0, & -1 < z < \epsilon \zeta, \\ \partial_z \phi = 0, & z = -1, \\ \partial_t \phi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\epsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 = 0, & z = \epsilon \zeta, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \zeta \partial_x \phi - \frac{1}{\mu} \partial_z \phi = 0, & z = \epsilon \zeta. \end{array} \right.$$

Problema: O domínio desse sistema não é fixo (com o tempo)!

3. Equações de Bernoulli

Integramos e renormalizamos as equações de Euler e obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \partial_x^2 \phi + \partial_z^2 \phi = 0, & -1 < z < \epsilon \zeta, \\ \partial_z \phi = 0, & z = -1, \\ \partial_t \phi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{\epsilon}{2\mu} (\partial_z \phi)^2 = 0, & z = \epsilon \zeta, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \zeta \partial_x \phi - \frac{1}{\mu} \partial_z \phi = 0, & z = \epsilon \zeta. \end{array} \right.$$

Problema: O domínio desse sistema não é fixo (com o tempo)!

4. Equações em domínio fixo

Introduzemos o potencial de velocidade na superfície:

$$\psi(t, x) := \phi(t, x, \epsilon \zeta(t, x)),$$

e o operador de Dirichlet-Neumann

$$Z_\mu(\epsilon \zeta) : \psi \mapsto \partial_z \phi|_{z=\epsilon \zeta}$$

⇒ (das equações de Bernouilli)

$$(S) \begin{cases} \partial_t \psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) (Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi)^2 = 0, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \psi \partial_x \zeta - \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi = 0. \end{cases}$$

4. Equações em domínio fixo

Introduzemos o potencial de velocidade na superfície:

$$\psi(t, x) := \phi(t, x, \epsilon \zeta(t, x)),$$

e o operador de Dirichlet-Neumann

$$Z_\mu(\epsilon \zeta) : \psi \mapsto \partial_z \phi|_{z=\epsilon \zeta}$$

⇒ (das equações de Bernouilli)

$$(S) \begin{cases} \partial_t \psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) (Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi)^2 = 0, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \psi \partial_x \zeta - \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi = 0. \end{cases}$$

4. Equações em domínio fixo

Introduzemos o potencial de velocidade na superfície:

$$\psi(t, x) := \phi(t, x, \epsilon \zeta(t, x)),$$

e o operador de Dirichlet-Neumann

$$Z_\mu(\epsilon \zeta) : \psi \mapsto \partial_z \phi|_{z=\epsilon \zeta}$$

\Rightarrow (das equações de Bernouilli)

$$(S) \begin{cases} \partial_t \psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) (Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi)^2 = 0, \\ \partial_t \zeta + \epsilon \partial_x \psi \partial_x \zeta - \left(\frac{1}{\mu} + \epsilon^2 (\partial_x \zeta)^2 \right) Z_\mu(\epsilon \zeta) \psi = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon\left(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi\right) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) = 0. \end{cases}$$

5. Modelo de Boussinesq

Fazemos a hipótese: $\epsilon \sim \mu \ll 1$ (água rasa e amplitude do escoamento fraca).

Estratégia: Desenvolvimento assintótico de (S) em função de ϵ + cortar os termos a partir da ordem ϵ^2 .

Dificuldade: $Z_\epsilon(\epsilon\zeta) = -\epsilon\partial_x^2\psi - \epsilon^2(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^3)$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 = 0, \\ \partial_t\zeta + \epsilon\partial_x\psi\partial_x\zeta + \partial_x^2\psi + \epsilon(\frac{1}{3}\partial_x^4\psi + \zeta\partial_x^2\psi) = 0. \end{cases}$$

6. Sistema de Boussinesq

Definimos $u := \partial_x \psi \leftrightarrow$ “velocidade horizontal na superfície”

Na verdade $u = \partial_x \phi|_{z=\epsilon\zeta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Derivamos a primeira equação e obtemos

$$(B) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \zeta + \frac{\epsilon}{2} \partial_x (u^2) = 0, \\ \partial_t \zeta + \partial_x u + \epsilon (\partial_x (\zeta u) + \frac{1}{3} \partial_x^3 u) = 0. \end{cases}$$

Existe varios outros sistemas de Boussinesq (formalmente equivalente a (B)): tomar por exemplo como incógnita: u_θ componente horizontal da velocidade numa altura θ .

6. Sistema de Boussinesq

Definimos $u := \partial_x \psi \leftrightarrow$ “velocidade horizontal na superfície”
Na verdade $u = \partial_x \phi|_{z=\epsilon\zeta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Derivamos a primeira equação e obtemos

$$(B) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \zeta + \frac{\epsilon}{2} \partial_x (u^2) = 0, \\ \partial_t \zeta + \partial_x u + \epsilon (\partial_x (\zeta u) + \frac{1}{3} \partial_x^3 u) = 0. \end{cases}$$

Existe varios outros sistemas de Boussinesq (formalmente equivalente a (B)): tomar por exemplo como incógnita: u_θ componente horizontal da velocidade numa altura θ .

6. Sistema de Boussinesq

Definimos $u := \partial_x \psi \leftrightarrow$ “velocidade horizontal na superfície”

Na verdade $u = \partial_x \phi|_{z=\epsilon\zeta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Derivamos a primeira equação e obtemos

$$(B) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \zeta + \frac{\epsilon}{2} \partial_x (u^2) = 0, \\ \partial_t \zeta + \partial_x u + \epsilon (\partial_x (\zeta u) + \frac{1}{3} \partial_x^3 u) = 0. \end{cases}$$

Existe varios outros sistemas de Boussinesq (formalmente equivalente a (B)): tomar por exemplo como incógnita: u_θ componente horizontal da velocidade numa altura θ .

6. Sistema de Boussinesq

Definimos $u := \partial_x \psi \leftrightarrow$ “velocidade horizontal na superfície”

Na verdade $u = \partial_x \phi|_{z=\epsilon\zeta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Derivamos a primeira equação e obtemos

$$(B) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \zeta + \frac{\epsilon}{2} \partial_x (u^2) = 0, \\ \partial_t \zeta + \partial_x u + \epsilon (\partial_x (\zeta u) + \frac{1}{3} \partial_x^3 u) = 0. \end{cases}$$

Existe varios outros sistemas de Boussinesq (formalmente equivalente a (B)): tomar por exemplo como incógnita: u_θ componente horizontal da velocidade numa altura θ .

7. Modelo unidirecional: derivação da equação KdV

Procuramos soluções desse sistema se propagando unidirecionalmente: $u(t, x) = v(\epsilon t, x - t)$ e $\zeta(t, x) = \eta(\epsilon t, x - t)$.

$$\Rightarrow \partial_x v = \partial_x \eta + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$\Rightarrow \eta$ e v satisfazem a equação

$$(KdV) \quad \partial_t v + \frac{1}{6} \partial_x^3 v + \frac{3}{2} v \partial_x v = 0$$

Teorema (Craig, 1985)

Seja η uma solução de (KdV) e $\zeta^\epsilon(x, t) = \eta(\epsilon t, x - t)$, então existe uma família de soluções exatas $(\psi_{ex}^\epsilon, \zeta_{ex}^\epsilon)$ de (S) tal que $\|\zeta^\epsilon - \zeta_{ex}^\epsilon\|_{L^\infty([0, T/\epsilon] \times \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

7. Modelo unidirecional: derivação da equação KdV

Procuramos soluções desse sistema se propagando unidirecionalmente: $u(t, x) = v(\epsilon t, x - t)$ e $\zeta(t, x) = \eta(\epsilon t, x - t)$.

$$\Rightarrow \partial_x v = \partial_x \eta + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$\Rightarrow \eta$ e v satisfazem a equação

$$(KdV) \quad \partial_t v + \frac{1}{6} \partial_x^3 v + \frac{3}{2} v \partial_x v = 0$$

Teorema (Craig, 1985)

Seja η uma solução de (KdV) e $\zeta^\epsilon(x, t) = \eta(\epsilon t, x - t)$, então existe uma família de soluções exatas $(\psi_{ex}^\epsilon, \zeta_{ex}^\epsilon)$ de (S) tal que $\|\zeta^\epsilon - \zeta_{ex}^\epsilon\|_{L^\infty([0, T/\epsilon] \times \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

7. Modelo unidirecional: derivação da equação KdV

Procuramos soluções desse sistema se propagando unidirecionalmente: $u(t, x) = v(\epsilon t, x - t)$ e $\zeta(t, x) = \eta(\epsilon t, x - t)$.

$$\Rightarrow \partial_x v = \partial_x \eta + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$\Rightarrow \eta$ e v satisfazem a equação

$$(KdV) \quad \partial_t v + \frac{1}{6} \partial_x^3 v + \frac{3}{2} v \partial_x v = 0$$

Teorema (Craig, 1985)

Seja η uma solução de (KdV) e $\zeta^\epsilon(x, t) = \eta(\epsilon t, x - t)$, então existe uma família de soluções exatas $(\psi_{ex}^\epsilon, \zeta_{ex}^\epsilon)$ de (S) tal que $\|\zeta^\epsilon - \zeta_{ex}^\epsilon\|_{L^\infty([0, T/\epsilon] \times \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

7. Modelo unidirecional: derivação da equação KdV

Procuramos soluções desse sistema se propagando unidirecionalmente: $u(t, x) = v(\epsilon t, x - t)$ e $\zeta(t, x) = \eta(\epsilon t, x - t)$.

$$\Rightarrow \partial_x v = \partial_x \eta + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$\Rightarrow \eta$ e v satisfazem a equação

$$(KdV) \quad \partial_t v + \frac{1}{6} \partial_x^3 v + \frac{3}{2} v \partial_x v = 0$$

Teorema (Craig, 1985)

Seja η uma solução de (KdV) e $\zeta^\epsilon(x, t) = \eta(\epsilon t, x - t)$, então existe uma família de soluções exatas $(\psi_{ex}^\epsilon, \zeta_{ex}^\epsilon)$ de (S) tal que $\|\zeta^\epsilon - \zeta_{ex}^\epsilon\|_{L^\infty([0, T/\epsilon] \times \mathbb{R})} \rightarrow 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

1. Equação KdV

Consideramos o problema de valor inicial associado a equação KdV:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(t=0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As soluções da KdV tem uma infinidade de quantidades conservadas (com o tempo),

- A massa: $M(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) dx = M(v_0)$.
- A energia: $E(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x v)^2(t, x) - \frac{1}{3} v^3(t, x)) dx = E(v_0)$.

1. Equação KdV

Consideramos o problema de valor inicial associado a equação KdV:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(t=0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As soluções da KdV tem uma infinidade de quantidades conservadas (com o tempo),

- A massa: $M(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) dx = M(v_0)$.
- A energia: $E(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x v)^2(t, x) - \frac{1}{3} v^3(t, x)) dx = E(v_0)$.

1. Equação KdV

Consideramos o problema de valor inicial associado a equação KdV:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(t=0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As soluções da KdV tem uma infinidade de quantidades conservadas (com o tempo),

- A massa: $M(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) dx = M(v_0)$.
- A energia:
 $E(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x v)^2(t, x) - \frac{1}{3} v^3(t, x)) dx = E(v_0)$.

1. Equação KdV

Consideramos o problema de valor inicial associado a equação KdV:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v \partial_x v = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ v(t=0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

As soluções da KdV tem uma infinidade de quantidades conservadas (com o tempo),

- A massa: $M(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) dx = M(v_0)$.

- A energia:

$$E(v)(t) := \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x v)^2(t, x) - \frac{1}{3} v^3(t, x)) dx = E(v_0).$$

2. Boa colocação

Um Problema de valor inicial (PVI) é localmente bem posto num certo espaço de funções X :

- Existência de uma única solução u para todo dado inicial u_0 em X no intervalo de tempo $[0, T]$.
- Persistência: $u \in C([0, T]; X)$.
- Continua dependência do fluxo : $u_0 \mapsto u$.

O PVI é globalmente bem posto se o tempo maximal de existência das soluções é $T_{max} = \infty$.

2. Boa colocação

Um Problema de valor inicial (PVI) é localmente bem posto num certo espaço de funções X :

- Existência de uma única solução u para todo dado inicial u_0 em X no intervalo de tempo $[0, T]$.
- Persistência: $u \in C([0, T]; X)$.
- Continua dependência do fluxo : $u_0 \longmapsto u$.

O PVI é globalmente bem posto se o tempo maximal de existência das soluções é $T_{max} = \infty$.

2. Boa colocação

Um Problema de valor inicial (PVI) é localmente bem posto num certo espaço de funções X :

- Existência de uma única solução u para todo dado inicial u_0 em X no intervalo de tempo $[0, T]$.
- Persistência: $u \in C([0, T]; X)$.
- Continua dependência do fluxo : $u_0 \longmapsto u$.

O PVI é globalmente bem posto se o tempo maximal de existência das soluções é $T_{max} = \infty$.

2. Boa colocação

Um Problema de valor inicial (PVI) é localmente bem posto num certo espaço de funções X :

- Existência de uma única solução u para todo dado inicial u_0 em X no intervalo de tempo $[0, T]$.
- Persistência: $u \in C([0, T]; X)$.
- Continua dependência do fluxo : $u_0 \mapsto u$.

O PVI é globalmente bem posto se o tempo maximal de existência das soluções é $T_{max} = \infty$.

2. Boa colocação

Um Problema de valor inicial (PVI) é localmente bem posto num certo espaço de funções X :

- Existência de uma única solução u para todo dado inicial u_0 em X no intervalo de tempo $[0, T]$.
- Persistência: $u \in C([0, T]; X)$.
- Continua dependência do fluxo : $u_0 \mapsto u$.

O PVI é globalmente bem posto se o tempo maximal de existência das soluções é $T_{max} = \infty$.

3. Boa colocação para a equação KdV em H^1

Devido as quantidades conservadas, o espaço natural para a boa colocação da KdV é o espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Teorema (Kenig, Ponce, Vega; 1993)

O PVI associado a equação KdV é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova:

→ Resolver a equação integral associada (princípio de Duhamel)

$$v(t) = F(v)(t) := V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau,$$

onde $V(t) := e^{-t\partial_x^3}$ é o grupo associado a parte linear da KdV.

3. Boa colocação para a equação KdV em H^1

Devido as quantidades conservadas, o espaço natural para a boa colocação da KdV é o espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Teorema (Kenig, Ponce, Vega; 1993)

O PVI associado a equação KdV é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova:

→ Resolver a equação integral associada (princípio de Duhamel)

$$v(t) = F(v)(t) := V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau,$$

onde $V(t) := e^{-t\partial_x^3}$ é o grupo associado a parte linear da KdV.

3. Boa colocação para a equação KdV em H^1

Devido as quantidades conservadas, o espaço natural para a boa colocação da KdV é o espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Teorema (Kenig, Ponce, Vega; 1993)

O PVI associado a equação KdV é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova:

→ Resolver a equação integral associada (princípio de Duhamel)

$$v(t) = F(v)(t) := V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau,$$

onde $V(t) := e^{-t\partial_x^3}$ é o grupo associado a parte linear da KdV.

3. Boa colocação para a equação KdV em H^1

Devido as quantidades conservadas, o espaço natural para a boa colocação da KdV é o espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Teorema (Kenig, Ponce, Vega; 1993)

O PVI associado a equação KdV é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova:

→ Resolver a equação integral associada (princípio de Duhamel)

$$v(t) = F(v)(t) := V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau,$$

onde $V(t) := e^{-t\partial_x^3}$ é o grupo associado a parte linear da KdV.

3. Boa colocação para a equação KdV em H^1

Devido as quantidades conservadas, o espaço natural para a boa colocação da KdV é o espaço de energia $H^1(\mathbb{R})$.

Teorema (Kenig, Ponce, Vega; 1993)

O PVI associado a equação KdV é globalmente bem posto em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova:

→ Resolver a equação integral associada (princípio de Duhamel)

$$v(t) = F(v)(t) := V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau,$$

onde $V(t) := e^{-t\partial_x^3}$ é o grupo associado a parte linear da KdV.

4. Efeitos regularizantes associados a V

- Provar que o operador F é uma contração num espaço de Banach $X_T \hookrightarrow C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$.
- Efeitos regularizantes.
 - Estimativa de Strichartz

$$\|V(t)\phi\|_{L_t^6 L_x^\infty} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Efeito regularizante tipo Kato:

$$\|\partial_x V(t)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Estimativa de função maximal:

$$\|V(t)\phi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\|\phi\|_{H_x^1}.$$

4. Efeitos regularizantes associados a V

- Provar que o operador F é uma contração num espaço de Banach $X_T \hookrightarrow C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$.
- Efeitos regularizantes.
 - Estimativa de Strichartz

$$\|V(t)\phi\|_{L_t^6 L_x^\infty} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Efeito regularizante tipo Kato:

$$\|\partial_x V(t)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Estimativa de função maximal:

$$\|V(t)\phi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\|\phi\|_{H_x^1}.$$

4. Efeitos regularizantes associados a V

- Provar que o operador F é uma contração num espaço de Banach $X_T \hookrightarrow C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$.
- Efeitos regularizantes.
 - Estimativa de Strichartz

$$\|V(t)\phi\|_{L_t^6 L_x^\infty} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Efeito regularizante tipo Kato:

$$\|\partial_x V(t)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Estimativa de função maximal:

$$\|V(t)\phi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\|\phi\|_{H_x^1}.$$

4. Efeitos regularizantes associados a V

- Provar que o operador F é uma contração num espaço de Banach $X_T \hookrightarrow C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$.
- Efeitos regularizantes.
 - Estimativa de Strichartz

$$\|V(t)\phi\|_{L_t^6 L_x^\infty} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Efeito regularizante tipo Kato:

$$\|\partial_x V(t)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Estimativa de função maximal:

$$\|V(t)\phi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\|\phi\|_{H_x^1}.$$

4. Efeitos regularizantes associados a V

- Provar que o operador F é uma contração num espaço de Banach $X_T \hookrightarrow C([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$.
- Efeitos regularizantes.
 - Estimativa de Strichartz

$$\|V(t)\phi\|_{L_t^6 L_x^\infty} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Efeito regularizante tipo Kato:

$$\|\partial_x V(t)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\|\phi\|_{L_x^2}.$$

- Estimativa de função maximal:

$$\|V(t)\phi\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\|\phi\|_{H_x^1}.$$

5. Teorema do ponto fixo

→ Definimos o espaço

$$X_T := \{v \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) : \|v\|_{X_T} < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\|v\|_{X_T} := \|v\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|\partial_x v\|_{L_T^6 L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^2 v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}$$

→ Usamos os efeitos regularizantes e deduzmos que

$$\|F(v)\|_{X_T} \leq c (\|v_0\|_{H^1} + T^\alpha \|v\|_{X_T}^2),$$

e

$$\|F(v) - F(w)\|_{X_T} \leq c \|v + w\|_{X_T} \|v - w\|_{X_T}$$

5. Teorema do ponto fixo

→ Definimos o espaço

$$X_T := \{v \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) : \|v\|_{X_T} < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\|v\|_{X_T} := \|v\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|\partial_x v\|_{L_T^6 L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^2 v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}$$

→ Usamos os efeitos regularizantes e deduzmos que

$$\|F(v)\|_{X_T} \leq c (\|v_0\|_{H^1} + T^\alpha \|v\|_{X_T}^2),$$

e

$$\|F(v) - F(w)\|_{X_T} \leq c \|v + w\|_{X_T} \|v - w\|_{X_T}$$

5. Teorema do ponto fixo

→ Definimos o espaço

$$X_T := \{v \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) : \|v\|_{X_T} < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\|v\|_{X_T} := \|v\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|\partial_x v\|_{L_T^6 L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^2 v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}$$

→ Usamos os efeitos regularizantes e deduzmos que

$$\|F(v)\|_{X_T} \leq c (\|v_0\|_{H^1} + T^\alpha \|v\|_{X_T}^2),$$

e

$$\|F(v) - F(w)\|_{X_T} \leq c \|v + w\|_{X_T} \|v - w\|_{X_T}$$

5. Teorema do ponto fixo

→ Definimos o espaço

$$X_T := \{v \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) : \|v\|_{X_T} < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\|v\|_{X_T} := \|v\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|\partial_x v\|_{L_T^6 L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^2 v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}$$

→ Usamos os efeitos regularizantes e deduzmos que

$$\|F(v)\|_{X_T} \leq c (\|v_0\|_{H^1} + T^\alpha \|v\|_{X_T}^2),$$

e

$$\|F(v) - F(w)\|_{X_T} \leq c \|v + w\|_{X_T} \|v - w\|_{X_T}$$

6. Conclusão

→ Escolhemos $a := 2C\|v_0\|_{H^1}$ e

$$T < \frac{1}{(2Ca)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{(4C^2\|v_0\|_{H^1})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

⇒

F é uma contração na bola $X_T(a)$ de X_T centrada na origem e de raio a . □

6. Conclusão

→ Escolhemos $a := 2C\|v_0\|_{H^1}$ e

$$T < \frac{1}{(2Ca)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{(4C^2\|v_0\|_{H^1})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

⇒

F é uma contração na bola $X_T(a)$ de X_T centrada na origem e de raio a . □

6. Conclusão

→ Escolhemos $a := 2C\|v_0\|_{H^1}$ e

$$T < \frac{1}{(2Ca)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{(4C^2\|v_0\|_{H^1})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

⇒

F é uma contração na bola $X_T(a)$ de X_T centrada na origem e de raio a . □

6. Conclusão

→ Escolhemos $a := 2C\|v_0\|_{H^1}$ e

$$T < \frac{1}{(2Ca)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{(4C^2\|v_0\|_{H^1})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

⇒

F é uma contração na bola $X_T(a)$ de X_T centrada na origem e de raio a . □

1. Existência

Procuramos soluções particulares da KdV sob a forma $v(x, t) = \phi(x - ct)$ EDO:

$$(EI) \quad -\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = 0.$$

Multiplicamos por ϕ' e integramos:

$$-(\phi')^2 + c\phi^2 - \frac{1}{3}\phi^3 = 0,$$

\Rightarrow Obtemos uma família de soluções a um parametro:

$$\phi_c(x) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

onde $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$ é a secante hiperbólica.

1. Existência

Procuramos soluções particulares da KdV sob a forma $v(x, t) = \phi(x - ct)$ EDO:

$$(EI) \quad -\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = 0.$$

Multiplicamos por ϕ' e integramos:

$$-(\phi')^2 + c\phi^2 - \frac{1}{3}\phi^3 = 0,$$

⇒ Obtemos uma família de soluções a um parametro:

$$\phi_c(x) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

onde $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$ é a secante hiperbólica.

1. Existência

Procuramos soluções particulares da KdV sob a forma $v(x, t) = \phi(x - ct)$ EDO:

$$(EI) \quad -\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = 0.$$

Multiplicamos por ϕ' e integramos:

$$-(\phi')^2 + c\phi^2 - \frac{1}{3}\phi^3 = 0,$$

\Rightarrow Obtemos uma família de soluções a um parametro:

$$\phi_c(x) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

onde $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$ é a secante hiperbólica.

1. Existência

Procuramos soluções particulares da KdV sob a forma $v(x, t) = \phi(x - ct)$ EDO:

$$(EI) \quad -\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = 0.$$

Multiplicamos por ϕ' e integramos:

$$-(\phi')^2 + c\phi^2 - \frac{1}{3}\phi^3 = 0,$$

\Rightarrow Obtemos uma família de soluções a um parametro:

$$\phi_c(x) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right), \quad c \in \mathbb{R},$$

onde $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$ é a secante hiperbólica.

2. Estabilidade no sentido de Lyapounov

Definição

Seja ϕ_c uma onda solitária, diremos que ϕ_c é estável (no sentido de Lyapounov) se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \|v(t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

Problema: a gente não tem estabilidade no sentido de Lyapounov!

Seja $\eta \neq c$, então $\phi_\eta \rightarrow_{H^1} \phi_c$, quando $\eta \rightarrow c$,
mas

$$\|\phi_\eta(\cdot - \eta t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1}^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \|\phi_\eta\|_{H^1}^2 + \|\phi_c\|_{H^1}^2.$$

2. Estabilidade no sentido de Lyapounov

Definição

Seja ϕ_c uma onda solitária, diremos que ϕ_c é estável (no sentido de Lyapounov) se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R}),$

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \|v(t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

Problema: a gente não tem estabilidade no sentido de Lyapounov!

Seja $\eta \neq c$, então $\phi_\eta \rightarrow_{H^1} \phi_c$, quando $\eta \rightarrow c$,
mas

$$\|\phi_\eta(\cdot - \eta t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1}^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \|\phi_\eta\|_{H^1}^2 + \|\phi_c\|_{H^1}^2.$$

2. Estabilidade no sentido de Lyapounov

Definição

Seja ϕ_c uma onda solitária, diremos que ϕ_c é estável (no sentido de Lyapounov) se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \|v(t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

Problema: a gente não tem estabilidade no sentido de Lyapounov!

Seja $\eta \neq c$, então $\phi_\eta \rightarrow_{H^1} \phi_c$, quando $\eta \rightarrow c$,

mas

$$\|\phi_\eta(\cdot - \eta t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1}^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \|\phi_\eta\|_{H^1}^2 + \|\phi_c\|_{H^1}^2.$$

2. Estabilidade no sentido de Lyapounov

Definição

Seja ϕ_c uma onda solitária, diremos que ϕ_c é estável (no sentido de Lyapounov) se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \|v(t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

Problema: a gente não tem estabilidade no sentido de Lyapounov!

Seja $\eta \neq c$, então $\phi_\eta \rightarrow_{H^1} \phi_c$, quando $\eta \rightarrow c$,
mas

$$\|\phi_\eta(\cdot - \eta t) - \phi_c(\cdot - ct)\|_{H^1}^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \|\phi_\eta\|_{H^1}^2 + \|\phi_c\|_{H^1}^2.$$

3. Estabilidade orbital

Queremos enfraquecer a definição de estabilidade. Seja ϕ_c uma onda solitária, a órbita de ϕ_c é dada por

$$\Omega_{\phi_c} = \{\phi_c(\cdot + r) : r \in \mathbb{R}\} \hookrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})).$$

Definição

A onda solitária ϕ_c é orbitalmente estável se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \inf_{r \in \mathbb{R}} \|v(t) - \phi_c(\cdot + r)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

3. Estabilidade orbital

Queremos enfraquecer a definição de estabilidade. Seja ϕ_c uma onda solitária, a órbita de ϕ_c é dada por

$$\Omega_{\phi_c} = \{\phi_c(\cdot + r) : r \in \mathbb{R}\} \hookrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})).$$

Definição

A onda solitária ϕ_c é orbitalmente estável se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \inf_{r \in \mathbb{R}} \|v(t) - \phi_c(\cdot + r)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

3. Estabilidade orbital

Queremos enfraquecer a definição de estabilidade. Seja ϕ_c uma onda solitária, a órbita de ϕ_c é dada por

$$\Omega_{\phi_c} = \{\phi_c(\cdot + r) : r \in \mathbb{R}\} \hookrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R})).$$

Definição

A onda solitária ϕ_c é orbitalmente estável se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall v_0 \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\|v_0 - \phi_c\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \inf_{r \in \mathbb{R}} \|v(t) - \phi_c(\cdot + r)\|_{H^1} < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde v é a solução da KdV satisfazendo $v(0) = v_0$.

4. Teorema de Benjamin

Teorema (Benjamin;1972)

Seja ϕ_c uma onda solitária da KdV, então ϕ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova: Fixa $c \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi_c$ a onda solitária associada, $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e v a solução da KdV tal que $v(0) = v_0$.

→ Usar as quantidades conservadas da KdV:

$$B(v(t)) := E(v(t)) + cM(v(t)) = B(v_0).$$

Note que $B'(\phi) = 0$.

4. Teorema de Benjamin

Teorema (Benjamin;1972)

Seja ϕ_c uma onda solitária da KdV, então ϕ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova: Fixa $c \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi_c$ a onda solitária associada, $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e v a solução da KdV tal que $v(0) = v_0$.

→ Usar as quantidades conservadas da KdV:

$$B(v(t)) := E(v(t)) + cM(v(t)) = B(v_0).$$

Note que $B'(\phi) = 0$.

4. Teorema de Benjamin

Teorema (Benjamin;1972)

Seja ϕ_c uma onda solitária da KdV, então ϕ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova: Fixa $c \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi_c$ a onda solitária associada, $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e v a solução da KdV tal que $v(0) = v_0$.

→ Usar as quantidades conservadas da KdV:

$$B(v(t)) := E(v(t)) + cM(v(t)) = B(v_0).$$

Note que $B'(\phi) = 0$.

4. Teorema de Benjamin

Teorema (Benjamin;1972)

Seja ϕ_c uma onda solitária da KdV, então ϕ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova: Fixa $c \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi_c$ a onda solitária associada, $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e v a solução da KdV tal que $v(0) = v_0$.

→ Usar as quantidades conservadas da KdV:

$$B(v(t)) := E(v(t)) + cM(v(t)) = B(v_0).$$

Note que $B'(\phi) = 0$.

4. Teorema de Benjamin

Teorema (Benjamin;1972)

Seja ϕ_c uma onda solitária da KdV, então ϕ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$.

Idéia da prova: Fixa $c \in \mathbb{R}$ e $\phi = \phi_c$ a onda solitária associada, $v_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e v a solução da KdV tal que $v(0) = v_0$.

→ Usar as quantidades conservadas da KdV:

$$B(v(t)) := E(v(t)) + cM(v(t)) = B(v_0).$$

Note que $B'(\phi) = 0$.

5. Idéia da prova

→ Define $w(x, t) := v(x + \gamma(t), t) - \phi(x)$, onde $\gamma(t)$ é algum parametro “minimizante”.

$$\Delta B(t) := B(w(t) + \phi) - B(\phi).$$

⇒

$$\Delta B(t) = \Delta B(0) = B(v_0) - B(\phi) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ Por outro lado,

$$\Delta B(t) = (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} w^3 dx \geq (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - c \|w\|_{H^1}^3,$$

onde

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + (c - \phi).$$

5. Idéia da prova

→ Define $w(x, t) := v(x + \gamma(t), t) - \phi(x)$, onde $\gamma(t)$ é algum parametro “minimizante”.

$$\Delta B(t) := B(w(t) + \phi) - B(\phi).$$

⇒

$$\Delta B(t) = \Delta B(0) = B(v_0) - B(\phi) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ Por outro lado,

$$\Delta B(t) = (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} w^3 dx \geq (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - c \|w\|_{H^1}^3,$$

onde

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + (c - \phi).$$

5. Idéia da prova

→ Define $w(x, t) := v(x + \gamma(t), t) - \phi(x)$, onde $\gamma(t)$ é algum parametro “minimizante”.

$$\Delta B(t) := B(w(t) + \phi) - B(\phi).$$

⇒

$$\Delta B(t) = \Delta B(0) = B(v_0) - B(\phi) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ Por outro lado,

$$\Delta B(t) = (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} w^3 dx \geq (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - c \|w\|_{H^1}^3,$$

onde

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + (c - \phi).$$

5. Idéia da prova

→ Define $w(x, t) := v(x + \gamma(t), t) - \phi(x)$, onde $\gamma(t)$ é algum parametro “minimizante”.

$$\Delta B(t) := B(w(t) + \phi) - B(\phi).$$

⇒

$$\Delta B(t) = \Delta B(0) = B(v_0) - B(\phi) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ Por outro lado,

$$\Delta B(t) = (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} w^3 dx \geq (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - c \|w\|_{H^1}^3,$$

onde

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + (c - \phi).$$

5. Idéia da prova

→ Define $w(x, t) := v(x + \gamma(t), t) - \phi(x)$, onde $\gamma(t)$ é algum parametro “minimizante”.

$$\Delta B(t) := B(w(t) + \phi) - B(\phi).$$

⇒

$$\Delta B(t) = \Delta B(0) = B(v_0) - B(\phi) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ Por outro lado,

$$\Delta B(t) = (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} w^3 dx \geq (\mathcal{L}w, w)_{L^2} - c \|w\|_{H^1}^3,$$

onde

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + (c - \phi).$$

6. Idéia da prova

→ Estuda espectral do operador \mathcal{L} .

(Note por exemplo que $\mathcal{L}\phi' = 0$)

⇒

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2} \geq \beta_0 \|w\|_{H^1}^2 - \beta_1 \|w\|_{H^1}^3 - \beta_2 \|w\|_{H^1}^4,$$

pelo menos quando $\|v_0\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

→ Deduzemos que existe uma função g com $g(0) = 0$, continua positiva e crescente sobre um pequeno intervalo $[0, s_1]$ tal que

$$g(\|v(\cdot + \gamma(t), t) - \phi\|_{H^1}) \leq \Delta B(t) = \Delta B(0) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

→ No caso geral, usamos um argumento de escala para concluir.

□

6. Idéia da prova

- Estuda espectral do operador \mathcal{L} .
(Note por exemplo que $\mathcal{L}\phi' = 0$)

⇒

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2} \geq \beta_0 \|w\|_{H^1}^2 - \beta_1 \|w\|_{H^1}^3 - \beta_2 \|w\|_{H^1}^4,$$

pelo menos quando $\|v_0\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

- Deduzemos que existe uma função g com $g(0) = 0$, continua positiva e crescente sobre um pequeno intervalo $[0, s_1]$ tal que

$$g(\|v(\cdot + \gamma(t), t) - \phi\|_{H^1}) \leq \Delta B(t) = \Delta B(0) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

- No caso geral, usamos um argumento de escala para concluir.
□

6. Idéia da prova

- Estuda espectral do operador \mathcal{L} .
(Note por exemplo que $\mathcal{L}\phi' = 0$)

⇒

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2} \geq \beta_0 \|w\|_{H^1}^2 - \beta_1 \|w\|_{H^1}^3 - \beta_2 \|w\|_{H^1}^4,$$

pelo menos quando $\|v_0\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

- Deduzemos que existe uma função g com $g(0) = 0$, continua positiva e crescente sobre um pequeno intervalo $[0, s_1]$ tal que

$$g(\|v(\cdot + \gamma(t), t) - \phi\|_{H^1}) \leq \Delta B(t) = \Delta B(0) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

- No caso geral, usamos um argumento de escala para concluir.
□

6. Idéia da prova

- Estuda espectral do operador \mathcal{L} .
(Note por exemplo que $\mathcal{L}\phi' = 0$)

⇒

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2} \geq \beta_0 \|w\|_{H^1}^2 - \beta_1 \|w\|_{H^1}^3 - \beta_2 \|w\|_{H^1}^4,$$

pelo menos quando $\|v_0\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

- Deduzemos que existe uma função g com $g(0) = 0$, continua positiva e crescente sobre um pequeno intervalo $[0, s_1]$ tal que

$$g(\|v(\cdot + \gamma(t), t) - \phi\|_{H^1}) \leq \Delta B(t) = \Delta B(0) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

- No caso geral, usamos um argumento de escala para concluir.
□

6. Idéia da prova

- Estuda espectral do operador \mathcal{L} .
(Note por exemplo que $\mathcal{L}\phi' = 0$)

⇒

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2} \geq \beta_0 \|w\|_{H^1}^2 - \beta_1 \|w\|_{H^1}^3 - \beta_2 \|w\|_{H^1}^4,$$




pelo menos quando $\|v_0\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

- Deduzemos que existe uma função g com $g(0) = 0$, continua positiva e crescente sobre um pequeno intervalo $[0, s_1]$ tal que

$$g(\|v(\cdot + \gamma(t), t) - \phi\|_{H^1}) \leq \Delta B(t) = \Delta B(0) \xrightarrow{\|v_0 - \phi\|_{H^1} \rightarrow 0} 0.$$

- No caso geral, usamos um argumento de escala para concluir.
□

Bibliografia.

-  D. Lannes, *Modélisation des Ondes de Surface et Justification Mathématique*, Ecole d'été, American University of Beyrut, Lebanon, 2005.
-  F. Linares and G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2003.
-  J. Angulo, *Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations*, 24 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2003.