

PROVA ESCRITA

Questão 1 [Ponto 3: Forma Canônica de Jordan]

- (1) Enuncie o Teorema da Forma Canônica de Jordan real para matrizes reais $n \times n$.
- (2) Seja A uma matriz real 5×5 com $\det(tI - A) = t^5 + 2t^3a + a^2t$, com $a \in \mathbb{R}$. Quais são as formas canônicas possíveis?
- (3) Seja B uma matriz real $n \times n$ com $\det(tI - B) = (t - 1)^n$, mostre que B é similar a B^{-1} .

Questão 2 [Ponto 6: Teorema de Stokes]

- (1) Enuncie o Teorema de Green-Gauss-Stokes em $\mathbb{R}^3$ para divergência e para rotacional.
- (2) Nesta questão $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Verifique que

$$\iiint_R \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial R} \nabla u \, d\mathbf{n}$$

- (3) Vamos escrever u em coordenadas polares. Para isso, considere o vetor posição

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

e o conjunto R delimitado por

$$r_1 < r < r_2 \quad , \quad \phi_1 < \phi < \phi_2 \quad \text{e} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

Calcule a contribuição dos três pares de faces opostas de R para

$$\iint_{\partial R} \nabla u \, d\mathbf{n}.$$

A expressão deve depender das derivadas parciais de u em relação a r , ϕ e θ , respectivamente.

- (4) Interprete essas contribuições como integrais em R .
- (5) Conclua que

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right).$$

Questão 3 [Ponto 10: Teorema Central do Limite]

- (1) Enuncie o Teorema Central do Limite.
- (2) Esboce a prova do Teorema
- (3) Explique como a demonstração do Teorema Central do Limite pode ser adaptada para mostrar um resultado de convergência em distribuição para as somas aleatórias $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, onde as variáveis aleatórias X_j são independentes e $\mathbb{P}(X_j = j^{-1/2}) = \mathbb{P}(X_j = -j^{-1/2}) = 1/2$.
- (4) Agora consideramos o problema mais geral em que $\mathbb{P}(X_j = j^\alpha) = \mathbb{P}(X_j = -j^\alpha) = 1/2$. Para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a sequência de somas aleatórias S_n (renormalizada da maneira apropriada) converge para Gaussiana em distribuição?